Комбинаторика зарождалась в течение нескольких тысячелетий, а в её современном виде — несколько сотен лет назад. Многие понятия и теоремы, рассматриваемые в этом курсе, появились ещё в 16-17 веках. На основе этих знаний уже выросла огромная наука, которой занимаются огромное количество людей. Каждый год проходят десятки крупных конференций и публикуются десятки тысяч статей в различных журналах.

Она является основой современной информатики. Законы комбинаторики прослеживаются, например, в живых системах и экономических сетях. В рамках данного курса конкретные приложения комбинаторики затронуты не будут.

Комбинаторика изучает различные комбинации объектов. Как правило, речь идёт о их конечном числе.

1. Основные правила комбинаторики

Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_m\}$ — два множества объектов. Множества A и B, вообще говоря, могут совпадать.

Определение *Модулем $|A|$ множества A называется число, равное количеству элементов в A.*

Правило (Правило сложения) *Количество способов выбрать один объект из множества A или один объект из множества B равно $|A| + |B|$.*

Пример Если A — множество букв русского алфавита, B — множество цифр:

$$A = \{\text{а,б,...,ё, ...,я}\}, \qquad B = \{1, 2, ..., 9, 0\},$$

то $|A| = 33$, $|B| = 10$, а выбрать или букву или цифру можно 43 способами.

Правило (Правило умножения) *Количество способов выбрать ровно один объект из множества A и вслед за ним ровно один объект из множества B равно $|A| \cdot |B|$.*

Продемонстрировать данное правило можно выписав все возможные пары из двух требуемых объектов в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccc} a_1b_1, & a_1b_2, & a_1b_3, & \dots, & a_1b_m \\ a_2b_1, & a_2b_2, & a_2b_3, & \dots, & a_2b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1, & a_nb_2, & a_nb_3, & \dots, & a_nb_m. \end{array}$$

Следствие (из правила умножения) *Пусть даны множества объектов $A_1, ..., A_k$ и $|A_i| = n_i$. Тогда число способов извлечь сначала один объект из A_1, вслед за ним один объект из A_2, и так далее вплоть до объекта из A_k равно $n_1n_2n_3...n_k$.*

Доказательство Непосредственно следует из правила умножения. Иллюстрацией служит многомерная таблица наподобие той, что применялась для иллюстрации правила умножения.

Пример Найти количество автомобильных номеров с определенным номером региона (за регионом могут быть зафиксированы несколько номеров региона). На первой позиции номера стоит буква русского алфавита, следующие три позиции заняты цифрами, а последние две — опять буквы русского алфавита. Причем в реальных номерах используются только 12 букв, которые имеют аналоги в латинском алфавите:

$$|A_1| = |A_5| = |A_6| = 12, \qquad |A_2| = |A_3| = |A_4| = 10.$$

Согласно следствию из правила умножения, число номеров:

$$n_1n_2n_3n_4n_5n_6 = 12^3 \cdot 10^3 = 1728000.$$

Правило (Принцип Дирихле) *Традиционно принцип Дирихле формулируется в терминах рассаживания кроликов по ящикам. Пусть в n ящиков рассаживают $n+1$ кроликов. Тогда в любом случае найдётся ящик с двумя или более кроликами.*

Доказательство Доказательство от противного: пусть в каждом ящике находится не более одного кролика. Тогда количество кроликов будет не больше чем n. Но всего кроликов $n+1$. Получено противоречие, а значит в каком-то из ящиков сидят два кролика.

Принцип Дирихле является основополагающим при доказательстве многих математических теорем.

Пример Как бы не были выбраны 5 точек внутри квадрата размером 2×2, среди них найдётся такая пара, расстояние между которыми не больше $\sqrt{2}$. Действительно, если рассматривать 4 клетки размером 1×1 за ящики, а точки — за кроликов, то найдется такая клетка 1×1, в которую попадут 2 точки. Расстояние между этими точками по геометрическим соображениям не превосходит длины диагонали данной клетки $\sqrt{2}$,.

2. Основные комбинаторные величины

Введенных правил и понятий достаточно для рассмотрения основных комбинаторных величин, которыми и занимается классическая комбинаторика. Эти соотношения связаны с организацией выбора объектов внутри какого-то множества.

Пример Каждая из букв русского алфавита нарисована на карточке. Карточки помещаются в коробку. Есть несколько возможных организации выбора:

(а) Всего 33 различных карточки. Пригоршней зачерпывают k карточек. Порядок следования букв не имеет значения.
(б) Всего 33 различных карточки. Последовательно извлекают k карточек с учетом порядка.

В случае (б) «лягушка» и «гуляшка» будут различными вариантами выбора 7 карточек, а в случае (а) — одним и тем же. Но, например, слово «кролик» нельзя получить ни в рамках первого варианта, ни в рамках второго. В слове «кролик» две буквы К, тогда как карточка только одна. Такую организацию выбора можно устроить только тогда, когда карточек каждого сорта достаточно много.

(в) Карточек всех 33 типов очень много. Пригоршней зачерпывают k карточек, карточки с одинаковой буквой могут встречаться более одного раза. Порядок следования букв не имеет значения. Зачерпнуть пригоршней k букв, причём одинаковая буква может выпасть сколько угодно раз.
(г) Карточек всех 33 типов очень много. Последовательно извлекают k карточек с учетом порядка. Карточки с одинаковой буквой могут встречаться более одного раза.

На самом деле конкретное множество объектов не имеет существенного значения: приведенные выше способы выбора k объектов можно распространить на выбор из абстрактного множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$:

(а) k-сочетания без повторений: порядок не важен, любой объект входит не более одного раза.
(б) k-размещения без повторений: порядок важен, любой объект входит не более одного раза.
(в) k-сочетания с повторениями: порядок не важен, любой объект может входить неограниченное число раз.
(г) k-размещения с повторениями: порядок важен, любой объект может входить неограниченное число раз.

Теперь необходимо найти количество возможностей осуществить выбор в каждом из представленных вариантов.

В рамках данного курса приняты следующие обозначения:

(а) Число сочетаний без повторений при выборе k объектов n из обозначается символом C_n^k.

Замечание Это обозначение читается «це из n по k» и восходит еще к Паскалю, одному из классиков современной теории вероятностей, который жил более 400 лет назад. Французы очень чтят данное обозначение, а также оно все еще используется в российской литературе. Однако в серьёзных журналах оно, если не забыто, то по крайней мере, не общепринято и заменено обозначением $\binom{n}{k}$.

Замечание Поскольку, как будет показано далее, во всех случаях (а)-(г) число вариантов выражается через C_n^k. Обозначения для других комбинаторных величин не так важны для международной литературы и не используются.

(б) Число размещений без повторений обозначается как A_n^k.
(в, г) Комбинаторные величины с повторениями получаются из соответствующих величин без повторения добавлением черты над соответствующим символом: $\bar{C}_n^k$ и $\bar{A}_n^k$.

Определение *Факториалом $n!$ называется следующая функция: для $n = 1$ факториал равен $1! = 1$, а для $n > 1$ — определяется согласно*

$$n! = (n-1)! \cdot n,$$

для $n = 0$ условно полагают $0! = 1$.

Замечание Говоря простыми словами, факториал — произведение всех чисел от 1 до n. Соглашение $0! = 1$ было введено для удобства.

Теорема *Число k-размещений с повторениями $\bar{A}_n^k$ равно n^k.*

Доказательство На первую позицию размещения можно выбрать n вариантов, на вторую — также n вариантов и т.д. Таким образом, по правилу умножения:

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k} = n^k.$$

Теорема *Число k-размещений без повторений A_n^k равно $n(n-1)...(n-k+1)$.*

Доказательство Первую позицию размещения можно заполнить любым из n объектов, вторую — любым из оставшихся $n-1$ объектов и т.д. Таким образом, по правилу умножения:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Замечание Количество способов выбрать ноль объектов $A_n^0 = 1$, поскольку пустое множество можно выбрать единственным способом. Это в точности согласуется с выведенной выше формулой через факториалы:

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1.$$

Другой особый случай — число перестановок из n элементов — также согласуется с введенной формулой:

$$A_n^n = n(n-1)\dots(n-n+1) = \frac{n!}{0!}.$$

Таким образом, если принять соглашение $0! = 1$, формула через факториалы успешно согласуется с исходным выражением.