1. Тождества с участием биномиальных коэффициентов

Утверждение (1) *Симметричность $C_n^k = C_n^{n-k}$. Это свойство было доказано ранее.*

Утверждение (2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Замечание Доказательство непосредственно следует из выражения для C_n^k. Однако более интересно другое, раскрывающее его внутреннюю комбинаторную суть, доказательство.

Доказательство Количество k-сочетаний элементов множества $\{a_1, ..., a_n\}$ равно C_n^k. Причем количество таких, которые содержат a_1, равно количеству способов выбрать $k-1$ элементов из $n-1$ оставшихся объектов, то есть C_{n-1}^{k-1}. С другой стороны, количество k-сочетаний, которые не содержат внутри себя a_1, равняется количеству способов выбрать k также из $n-1$ объектов, то есть C_{n-1}^k. Поскольку других возможностей нет:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Треугольник Паскаля

Выражения для $(x+y)^n$ для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^0 = 1\\
&(x+y)^1 = x + y\\
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\\
&(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\
&(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^3
\end{aligned}$$

Появляется треугольник Паскаля. Если явно выписать коэффициенты в предыдущих выражениях:

$$\begin{gathered}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1,
\end{gathered}$$

то можно заметить следующую закономерность: по бокам всегда стоят единицы, а любой коэффициент в следующей строчке равен сумме коэффициентов непосредственно над ним. Таким образом, треугольник Паскаля позволяет вычислить произвольный биномиальный коэффициент. Полученное ранее свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, на самом деле выражает данную закономерность. С треугольником Паскаля так или иначе связаны многие комбинаторные свойства, которые будут рассмотрены далее.

Утверждение (3) *Сумма всех элементов фиксированной строчки треугольника Паскаля*

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Доказательство Формула есть бином Ньютона в случае $x = y = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$

Доказательство (более комбинаторное) Количество всех возможных последовательностей из 0 и 1 длины n равняется, согласно принципу умножения, 2^n. С другой стороны можно разделить все множество таких последовательностей на некоторые непересекающиеся подмножества: 1 последовательность, состоящая только из нулей; множество всех таких последовательностей, которые содержат только одну 1; множество всех таких последовательностей, которые содержат ровно две единицы и так далее. Количество объектов в этих подмножествах соответственно C_n^0, C_n^1 и так далее. Таким образом, получается требуемое выражение:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Утверждение (4) *Сумма квадратов всех элементов фиксированной строки треугольника Паскаля*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Доказательство Рассмотрим множество объектов $\{a_1, a_2, ..., a_{2n}\}$. Количество всех возможных n-сочетаний без повторений равняется C_{2n}^n. Следует разбить это множество всевозможных сочетаний на такие подмножества, количество сочетаний в которых $(C_n^0)^2$, $(C_n^1)^2$, ..., $(C_n^n)^2$ соответственно.

Для этого можно представить множество объектов как объединение двух частей: $\{a_1, a_2, ..., a_n | a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}\}$. Тогда

1. n-сочетание $\{a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}\}$ единственно.
2. Из левой части извлекается 1 объект, из правой части — $(n-1)$ объект. Это можно сделать$C_n^1 C_n^{n-1} = (C_n^1)^2$ способами.
3. Из левой точки извлекается k объектов, из правой — $(n-k)$ объект. Это можно сделать $C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$ способами.

Вопрос на подумать: (Попытаться) найти обобщение на случай произвольной степени:

$$(C_n^0)^k + (C_n^1)^k + \dots + (C_n^n)^k.$$

Утверждение (5) *Рассмотрим все возможные m-сочетания объектов из множества $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ с повторениями. Количество таких m-сочетаний*

$$\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+1+m-1}^m = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n.$$

Все множество возможных m-сочетаний можно разделить на подмножества, в каждом из которых находятся только такие m-сочетания, где объект a_1 встречается фиксированное количество раз.

m-сочетания с повторениями, в которых нет объекта a_1, на самом деле есть m-сочетания из множества $\{a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Их число равно $C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$. В свою очередь, m-сочетания с повторениями, в которых ровно 1 объект a_1, на самом деле есть $m-1$-сочетания из того же множества. Их число равно $C_{n+m-2}^{m-1} = C_{n+m-2}^{n-1}$. И так далее. В итоге можно получить следующее тождество:

$$C_{n+m}^m = C_{n+m-1}^{n-1} + C_{n+m-2}^{n-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}$$

Из этого тождества можно получить ряд следствий:

Следствие *$(n = 1)$*

$$C_m^0 + C_{m-1}^0 + \dots + C_0^0 = C_{1+m}^1$$

$$1 + 1 + \dots + 1 = C_{1+m}^1 \qquad implies \qquad m + 1 = m + 1$$

Таким образом, следствие 1 не представляет никакого интереса.

Следствие *$(n = 2)$*

$$C_{m+1}^1 + C_m^1 + \dots + C_1^1 = C_{2+m}^2$$

$$(m+1) + m + \dots + 1 = C_{1+m}^2$$

Таким образом, следствие 2 является альтернативным доказательством выражения для суммы арифметической прогрессии.

Следствие *$(n = 3)$*

$$C_{m+2}^2 + C_{m+1}^2 + \dots + C_2^2 = C_{3+m}^3$$

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2} = C_{3+m}^3$$

$$\frac{(m+1)^2}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} + \dots + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = C_{3+m}^3$$

$$\frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + (m+1)) = C_{3+m}^3$$

Используя следствие 2, получается:

$$\frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2) + \frac{1}{4}(m+1)(m+2) = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$$

Следствие 3 позволяет вывести явную формулу для суммы квадратов натуральных чисел

$$1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2 = 2\left(\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6} - \frac{1}{4}(m+1)(m+2)\right)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Упр. Рассмотреть случай $n = 4$. Найти выражение для суммы кубов.

Знакопеременные тождества

Утверждение (6) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0 \\ 0 \text{ при } n \geq 1 \end{cases}$

Доказательство Тождество следует из бинома Ньютона в следующем частном случае:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k (-1)^{n-k} = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$