1. Полиномиальные коэффициенты

Пример Как было показано ранее, число способов образовать, например, из букв Л, Я, Г, У, Ш, К, А слово из 7ми букв без повторений равно 7!. Но если буквы повторяются, возникает другая ситуация. Из трех букв К, О, К можно образовать за счет перестановки букв только 3 слова: КОК, ОКК, ККО.

Таким образом, необходимо получить выражение для количества способов составить слово в том случае, когда буквы могут повторяться.

Пример Найти количество слов, которые можно образовать перестановкой букв в слове КОМБИНАТОРИКА.

Слово КОМБИНАТОРИКА из 13 букв: буквы К, О, А, И повторяются по два раза, остальные — буквы М, Б, Н, Т, Р — имеют кратность 1. Таким образом, всего заданы 13 позиции. На 2 позиции из них нужно установить букву К. Количество способов выбрать две такие позиции C_{13}^2. После этого осталось незадействованными $13 - 2 = 11$ позиций. На 2 из 11 мест необходимо поставить буквы О. Число способов сделать это C_{11}^2. Осталось 9 позиций, на которые можно ставить буквы А, И аналогичным образом, а затем — буквы М, Б, Н, Т, Р. Число вариантов их расставить

$$C_9^2 C_7^2 C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1.$$

Тогда согласно правилу умножения, искомое количество равняется:

$$C_{13}^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^1 \cdot C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 =$$

Это выражение можно упростить до более удобного вида

$$= \frac{13!}{2!\,11!} \cdot \frac{11!}{2!\,9!} \cdot \frac{9!}{1!\,8!} \cdot \frac{8!}{1!\,7!} \cdot \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{13!}{2!\,2!\,1!\,1!\,2!\,1!\,2!\,1!\,1!}.$$

Знаменатель итоговой формулы выражается через кратности всех присутствующих в слове букв, а числитель — через полное число букв в слове.

Теорема *Пусть k — количество типов объектов, n_i — количество объектов i-го типа, а $n = n_1 + \ldots + n_k$ — полное количество объектов. Тогда количество способов составить последовательность длиной n объектов:*

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доказательство Всего есть n позиций. $C_n^{n_1}$ — количество способов выбрать позиции для объектов первого типа. После этого остается $n - n_1$ свободных позиций. Количество способов выбрать позиции для объектов второго типа равно $C_{n-n_1}^{n_2}$. Аналогично количество способов выбрать позиции для объектов следующих типов: $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$, … , $C_{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = C_{n_k}^{n_k}$.

Тогда итоговое количество способов

$$\begin{aligned} P(n_1, \ldots, n_k) &= C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \\ &= \frac{n!}{n!\,(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\,0!} = \\ &= \frac{n!}{n_1!\,n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \end{aligned}$$

Обозначение $P(n_1, \ldots, n_k)$ — стандартное. Эта величина в случае, когда типов объектов всего 2 совпадает с биномиальным коэффициентом:

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Поэтому $P(n_1, \ldots, n_k)$ — полиномиальные коэффициенты, обобщение биномиальных коэффициентов.

Этимология этих обозначений следующая. Выражение $(x+y)^n$ называется биномом, где «би-» обозначает, что слагаемых два. «Поли-» по-гречески много, поэтому естественным обобщением бинома является полином. Интерес будет представлять целая степень полинома

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n.$$

Пример При $k = 3$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\end{aligned}$$

можно заметить появление коэффициентов $P(...)$:

$$\begin{aligned}P(2,0,0) &= 1 \text{ при } x_1^2 & &\longleftrightarrow x_1, x_1 \\ P(0,2,0) &= 1 \text{ при } x_2^2 & &\longleftrightarrow x_2, x_2 \\ P(0,0,2) &= 1 \text{ при } x_3^2 & &\longleftrightarrow x_3, x_3 \\ P(1,1,0) &= 2 \text{ при } x_1x_2 & &\longleftrightarrow x_1, x_2; x_2, x_1 \\ P(0,1,1) &= 2 \text{ при } x_2x_3 & &\longleftrightarrow x_2, x_3; x_3, x_2 \\ P(1,0,1) &= 2 \text{ при } x_1x_3 & &\longleftrightarrow x_1, x_3; x_3, x_1.\end{aligned}$$

Таким образом, при приведении подобных слагаемых, их количество оказывается равным количеству различных последовательностей, которые отвечают этому типу слагаемых. Такие последовательности в данном конкретном примере имеют длину 2, в которой могут присутствовать три типа объектов, а именно x_1, x_2 или x_3. В последовательности, которые соответствуют x_2x_3, объект типа x_1 встречается 0 раз, x_2 — 1 раз и объект типа x_3 — также 1 раз. На самом деле, число таких последовательностей есть $P(n_1, \dots, n_k)$ при $k = 3,\ n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = 1$.

Теорема *В общем случае оказывается верна следующая формула:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_k): \forall i \;\; n_i \geq 0, \\ n_1+\dots+n_k=n}} P(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

Доказательство Из каждой скобки

$$(x_1 + ... + x_k)^n = (x_1 + ... + x_k)(x_1 + ... + x_k)...(x_1 + ... + x_k)$$

можно взять по одной переменной, и тем самым получить последовательность переменных. С одной стороны, возникает последовательность переменных, выбранных из скобок. Пусть $n_i \geq 0$ — число переменных x_i в этой последовательности. Тогда $n_1 + ... + n_k = n$. С другой стороны, каждой такой последовательности отвечает выражение $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$. Это значит, что после приведения подобных слагаемых коэффициент при этом выражении — в точности количество указанных последовательностей, то есть $P(n_1, \dots, n_k)$ по изначальному его определению. Теорема доказана.

Ранее было получено тождество:$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$. Его прямым обобщением является следующее выражение:

$$\sum_{(n_1,\dots,n_k):\ \forall i n_i \geq 0 \ \ n_1+\dots+n_k=n} P(n_1, \dots, n_k) 1_1^{n_1} 1_2^{n_2} \dots 1_k^{n_k} = (1 + ... + 1)^n = k^n,$$

то есть

$$\sum_{(n_1,\dots,n_k):\ \forall i n_i \geq 0 \ \ n_1+\dots+n_k=n} P(n_1, \dots, n_k) = k^n.$$

При $k = 2$ с учетом $C_n^k = P(k, n - k)$ получается известное тождество.