ЛЕКЦИЯ 1

ОБХОДЫ ГРАФОВ

Существуют два классических понятия, связанных с обходами графов: эйлеров цикл и гамильтонов цикл.

Определение 1: Эйлеров цикл *(в графе) — цикл, который содержит все ребра этого графа.* ♣

Определение 2: Гамильтонов цикл *(в графе) — простой цикл, который проходит через все вершины этого графа.* ♣

Теорема 1 (Критерий эйлеровости) Связный граф:

1. Является эйлеровым;
2. Степень каждой его вершины чётна;
3. Множество ребер графа можно покрыть непересекающимися простыми циклами. *

Док-во: Требуется доказать цикл импликаций: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, тогда равносильность этих утверждений будет доказана.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Легко показать, что если граф эйлеров, то каждый проход по вершине вносит чётный вклад в её степень, таким образом, степень каждой вершины чётна.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Рассмотрим произвольную вершину x_1 нашего графа. Мы знаем, что степень её чётна, и граф, по условию, связный, поэтому эта степень не меньше двух: $\deg(x_1) \geqslant 2$. Есть какое-то ребро, смежное с x_1, обозначим второй конец этого ребра x_2. Тогда также $\deg(x_2) \geqslant 2$, что означает, что есть ребро, отличное от ребра x_1x_2, которое выходит из вершины x_2 и заканчивается в некой вершине x_3. Аналогично $\deg(x_3) \geqslant 2$. Значит, есть еще ребро, выходящее из x_3 и отличное от x_2x_3. Оно может идти в x_4, но может и в x_1. Если оно идет в x_1, то один простой цикл уже найден. Если это не так, то, аналогично, из x_4 ребро может выходить в x_1, x_2 или x_5.

Понятно, что до бесконечности цепочка вытягиваться не будет, так как граф конечный, и, таким образом, рано или поздно будет найден простой цикл. Обозначим этот цикл Z. Далее нужно удалить найденный цикл из нашего графа вместе со всеми рёбрами, которые ему принадлежат. При этом граф перестанет быть связным, но к каждой компоненте связности, которая останется в результате удаления цикла Z, мы можем применить ту же самую процедуру, и она отработает, потому что степени внутри компонент связности по прежнему будут не меньше двух. Удаляя цикл, мы каждую степень уменьшаем ровно на два. Но компонента связности имеет меньше вершин, чем исходный граф, а в каждой из них мы снова найдем циклы, которые затем снова удалим. В конце концов останутся те самые циклы, которые мы искали.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Допустим, есть только один цикл. Понятно, что он эйлеров. Это — база индукции. Допустим, что для $n-1$ циклов мы доказали, что можно обойти. Докажем для n циклов. На n-м цикле уже есть часть, состоящая из $n-1$ циклов, но общих ребер нет. Тогда обойдем сначала эту часть, затем обойдем часть для n-го цикла, затем оставшееся. Таким образом, мы показали, что такой граф является эйлеровым, чем завершили доказательство цикла импликаций и, соответственно, всей теоремы. ■

Аналогично доказывается обобщение данной теоремы, которое понадобится нам в дальнейшем:

Теорема 2 Связный ориентированный граф:

1. Является эйлеровым;

2. Входящая степень каждой вершины графа равна ее исходящей степени. $*$

С гамильтоновостью графа ситуация оказывается гораздо более сложной с алгоритмической точки зрения. К сожалению, не существует никаких разумных алгоритмов, которые бы проверяли гамильтоновость графа, это доказуемый факт, который здесь разобран не будет, так как это элемент теории сложности вычислений. Однако, несмотря на то, что не существует таких необходимых и достаточных условий гамильтоновости, существует масса отдельно достаточных и отдельно необходимых условий.

Теорема 3 (Критерий Дирака) Если степень каждой вершины графа не меньше, чем половина числа вершин данного графа, то граф — гамильтонов. $*$

Доказательство критерия остается в качестве упражнения.

Пример 1 Рассмотрим граф, который обозначим:

$$G(n, 3, 1) = (V, E),$$

где V — множество вершин, а E — множество ребер графа. Множество вершин будет состоять из векторов:

$$V = \{\overline{x} = (x_1 \dots x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 3\},$$

то есть из элементов n-мерного булева куба. Ребрами будем соединять те и только те пары вершин графа, расстояние между которыми равно двум:

$$E = \{\{\overline{x}, \overline{y}\} : |\overline{x} - \overline{y}| = 2\},$$

что равносильно тому, что $(\overline{x}, \overline{y}) = 1$, то есть 1 — это скалярное произведение, порождающее ребра. Попробуем применить к такому графу критерий Дирака:

$$|V| = C_n^3 \sim \frac{n^3}{6},$$

из чего следует, что для любой вершины v:

$$\deg(v) = 3 \cdot C_{n-3}^3 \sim \frac{3n^2}{2}.$$

Видно, что относительно такого графа критерий Дирака не работает. *

Определение 3: *Граф называется **регулярным**, если у него все степени вершин одинаковы.* ♣

Определение 4: *Граф называется **d-регулярным**, если у него степень каждой вершины равна d.* ♣

Определение 5: Вершинной связностью графа *G называется минимальное количество вершин, в результате удаления которых граф перестает быть связным. Обозначается $k(G)$.* ♣

К примеру, для дерева, имеющего хотя бы три вершины, вершинная связность равна 1.

Определение 6: Числом независимости графа *G называется максимальное количество вершин в свободном от ребер подмножестве, называемым назависимым подмножеством:*

$$\alpha(G) = max\{|W| : \ W \leqslant \ v, \forall x, y \in \ W\{x, y\} \notin \ E\}.$$

Пример 2 Графу, изображённому на рис. **??**, соответствует число независимости $\alpha(G) = 1$. Для графа на рис. **??** соответствует конфигурация $W = \{6, 8, 1, 3, 5\}$, $\alpha(G) = 3$.

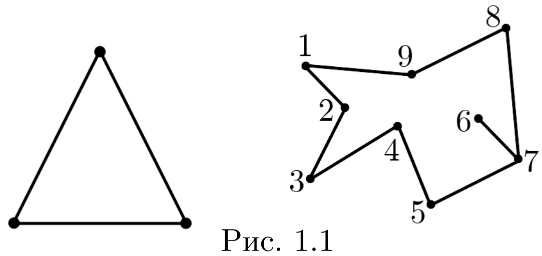

Рис. 1.1

Теорема 4 Пусть количество вершин в графе $|v| \geqslant 3$ и $\alpha(G) \leqslant k(G)$. Тогда граф — гамильтонов. *

Док-во: 1. Предположим, в графе G вообще нет циклов. Раз в графе хотя бы три вершины, то $\alpha(G) \geqslant 1$. Из условия следует, что:

$$k(G) \geqslant \alpha(G) \geqslant 1.$$

Раз в таком случае вершинная связанность больше 1, то граф G — связный, а связный граф, в котором нет циклов — это дерево. Но, по условию, это дерево, у которого хотя бы три вершины, значит, его связанность $k(G) = 1$, а $\alpha(G) \geqslant 2$, что противоречит нашему ограничению $\alpha(G) \leqslant k(G)$.

2. В G есть циклы. Возьмем максимальный по длине простой цикл. Предположим, что этот цикл $v_1, v_2 \ldots v_m$ задействует все вершины. Докажем, что он и есть гамильтонов. Обозначим этот цикл:

$$C = \{v_1, v_2 \ldots v_m\}.$$

Возьмем цикл C и удалим его из нашего графа со всеми вершинами и всеми исходящими из его вершин ребрами. По нашему предположению удаление этого цикла оставляет непустой граф. Обозначим за W — любую связную компоненту оставшегося графа, и:

$$N_G(W) = \{v \in V(G) : v \notin W, \exists w \in W : (v, w) \in E(G)\}.$$

По построению $N_G(W)$ содержится в C.

Случай 1:

$$v_i, v_{i+1} \in N_G(W).$$

Тогда см. рис. ??. Без ограничения общности W и W' могут совпадать. Так как W — связный граф, то есть пусть, соединяющий W и W', даже если это различные вершины. Тогда пришли к противоречию, ведь путь через

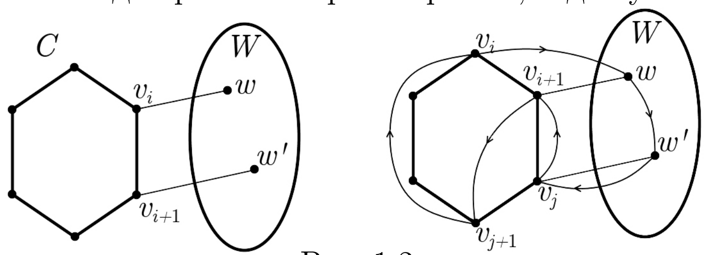

Рис. 1.2

вершины C, начиная от W', проходящий через все вершины до v_{i+1} , затем через нее, а далее через W' и W — заведомо длиннее хотя бы на единицу.

Случай 2: $\forall i, v_i$ и v_{i+1} одновременно не лежат в $N_G(W)$. Тогда рассмотрим множество:

$$M = \{v_{i+1} : v_i \in N_G(W)\}.$$

Знаем, что:

$$M \cap N_G(W) = \emptyset.$$

По построению:

$$|M| = |N_G(W)|.$$

Обозначим $k = k(G)$. Тогда:

$$|M| = |N_G(W)| \geqslant k,$$

так как иначе, удаляя все элементы этого множества из графа G, мы теряем связность. Предположим, что:

$$v_{i+1}, v_{j+1} \in M,$$

тогда:

$$\{v_{i+1}, v_{j+1}\} \in E(G),$$

то есть они соединены ребром в исходном графе. v_i и v_j — элементы из $N_G(W)$. Тогда на рис. **??** представлен хотя бы на единицу более длинный цикл, чем исходный, что означает, что ребра v_{i+1}, v_{j+1} быть не может. Значит, M — независимое множество, поскольку никакие две вершины из M не могут быть соединены ребром, если наш цикл самый длинный. Теперь рассмотрим множество $M \cup \{W\}$ — оно тоже независимое.

$$|M \cup \{W\}| = k + 1,$$

значит, мы нашли независимое множество, размер которого превосходит связность, а по условию это невозможно.

Задача Вернемся к примеру о графе:

$$G(n, 3, 1) = (V, E).$$

В качестве упражнения предполагается оценить его вершинную связность и число независимости, что будет разобрано на следующей лекции. *