ЛЕКЦИЯ 2

ТУРНИРЫ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ГРАФЫ ДЕ БРЁЙНА. ТЕОРЕМА ТУРАНА

В прошлый раз лекция закончилась на том, что мы захотели применить теорему 4 к конкретному примеру 1, продемонстрировав, что бывают графы, к которым неприменим критерий Дирака, а теорема 4 хорошо применяется.

Далее заметим, что для графа $G(n,3,1)$ из примера 1 минимальное число общих соседей у пар вершин этого графа не превосходит $k(G(n,3,1))$.

Тогда рассмотрим, какие бывают варианты таких векторов.

1. Множества единичных координат этих двух векторов вообще не пересекаются:

   $$111000000$$
   $$000011100$$

   У этих двух векторов общий сосед устроен таким образом: по единице на каждую тройку единиц из этих векторов и одна единица вне троек. Тогда число общих соседей будет $9(n-6)$.

2. Случай с единичным пересечением:

   $$111000000$$
   $$001110000$$

   Есть два варианта устройства вектора общего соседа: с единицей на общей позиции и на остальных $n-5$ позициях. Число таких вариантов:

   $$C_{n-5}^2 + 4(n-5).$$

   Значит, минимальное количество общих соседей уже заведомо в случае 1 (подразумевая n достаточно большим числом).

3. Пересечение по двум элементам:

$$111000000$$
$$011100000$$

Снова имеем два случая устройства общего ребра. В одном из них одна единица будет на позиции одного из элементов пересечения, а две другие будут на позициях общих нулей. В таком случае число таких векторов будет:

$$2 \cdot C_{n-5}^2 \gg 9(n-6).$$

Значит:

$$k(G(n,3,1)) \geqslant 9(n-6), n \geqslant n_0,$$
$$k(G(n,3,1)) \approx 9n.$$

Теперь попробуем оценить снизу $\alpha(G(n,3,1))$. Из того, что нас интересует независимое множество вершин в таком графе, следует, что тройки либо пересекаются по двум элементам, либо по нулю. С этим вопросом связано упражнение:

Задача Как много бывает троек на n элементов, если мы запрещаем им пересекаться ровно по одному общему элементу? $*$

Это упражнение мы разберем, когда будем рассматривать линейно-алгебраический метод в комбинаторике, пока же предлагается подумать над ним самостоятельно.

Вернемся к оценке числа независимости нашего графа $G(n,3,1)$. Из рассуждения о пересечении троек видно, что в таком графе можно построить независимое множество размера $n-2$. Например, для этого нужно взять все векторы, у которых две первые координаты есть единицы, тогда их попарные скалярные произведения равны двум. Но бывает и больше.

Теорема 5 $\alpha(G(n,3,1)) \leqslant n.$ $*$

Док-во: Пусть $W = \{\overline{x_1} \dots \overline{x_s}\}$ — независимое множество, то есть:

$$\forall i \neq j : (\overline{x_1}, \overline{x_j}) \neq 1.$$

Покажем, что $s < n$. Предположим:

$$c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} + \dots + c_s\overline{x_s} \equiv 0(2), \quad c_i \in \mathbb{Z}_2, \tag{2.1}$$

то есть c_i — нули или единицы. Докажем, что векторы — линейно-независимы, то есть такое возможно, только если все константы равны нулю.

Домножим обе части нашего сравнения скалярно на вектор $\overline{x_1}$:

$$c_1(\overline{x_1}, \overline{x_1}) + c_2(\overline{x_2}, \overline{x_1}) + \dots + c_s(\overline{x_s}, \overline{x_1}) \equiv 0(2).$$

Так как скалярный квадрат двух векторов из трех единиц равен 3, а, по условию, $(\overline{x_1}, \overline{x_j}) \neq 1$, то оно 0 или 2, значит:

$$c_2(\overline{x_2}, \overline{x_1}) = \dots = c_s(\overline{x_s}, \overline{x_1}) \equiv 0(2).$$

Тогда получается:

$$c_1 \cdot 3 + 0(2) \equiv 0(2),$$
$$c_1 \equiv 0(2).$$

Теперь аналогично скалярно домножим выражение (9.1) на $\overline{x_2}$, получим:

$$c_2 \equiv 0(2).$$

Проделаем аналогичную операцию для всех векторов, получим, что все константы равны нулю. Значит, эти векторы — линейно независимы. А если n-мерные векторы линейно независимы, то их не больше, чем n, что и требовалось доказать. ■

Итак, мы получили, что $\alpha(G(n,3,1)) \approx n$, а $k(G(n,3,1)) \approx 9n$. Значит, по теореме (4) граф G — гамильтонов.

Существуют и другие способы оценить размерность независимого множества для графа $(G(n,3,1))$. Например, возьмем отрезок от 1 до n, разобьем его на столько четверок, на сколько возможно, как показано на рис. 2.1.

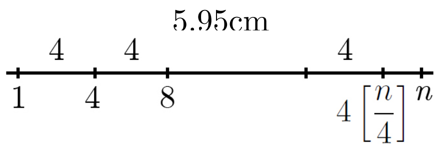

Рис. 2.1

Каждый получившийся отрезок заполним тройками. В одном отрезке помещается четыре тройки. Они пересекаются между собой всегда по два элемента внутри одного отрезка, а тройки из разных отрезков между собой не пересекаются. Значит, это независимое множество. Если остаток от деления n на 4 равен 3, то в последнем отрезке можно расположить еще одну тройку. Итак, получим:

$$\begin{aligned} &n \equiv 0(4) \Rightarrow n; \\ &n \equiv 1(4) \Rightarrow n-1; \\ &n \equiv 2(4), n \equiv 3(4) \Rightarrow n-2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Правильность оценки можно доказать по индукции, что остается в качестве упражнения:

Задача Доказать по индукции правильность оценки (2.2). $*$

1. Турниры

Введем понятие **турнир**. Возьмем полный граф на n вершинах, обозначим его K_n, затем на каждое из ребер этого графа повесим ровно одну стрелочку. Получим определение турнира:

Определение 7: *Когда для каждой пары вершин в полном графе есть указание, от какой вершины к какой переходить, то происходит* ***турнир****.* ♣

Скажем, что в таком графе тот, от кого идет стрелочка, является победителем данного матча.

Применительно к турниру будем понимать цепь с учетом правильности прохода по графу в зависимости от направления стрелок.

Пример турнира приведен на рис. 2.2.

В истории комбинаторики принято считать, что со следующей теоремы был принят вероятностный метод в комбинаторике:

Теорема 6 (1947, Селе) Существует турнир на n вершинах, в котором не меньше, чем $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых цепей. $*$

Док-во: Рассмотрим случайный турнир, то есть ориентируем каждое ребро независимо от остальных с одной и той же вероятностью. Возьмем случайную величину как функцию от элементарного исхода:

$$\xi = \xi(T),$$

что будет означать число гамильтоновых цепей в случайном турнире. Так как математическое ожидание всегда линейно:

$$M\xi = n! \cdot 2^{1-n},$$

где 2^{1-n} — вероятность того, что все стрелочки направлены в одну сторону. Тогда:

$$\exists T : \xi(T) \geqslant \frac{n!}{2^{n-1}},$$

что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Теорема 7 (Алон) $\forall T\ \xi(T) = O\Big(n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{n!}{2^n}\Big).$ $*$

Доказательство теоремы можно найти в книге Алона и Спенсера «Вероятностный метод».

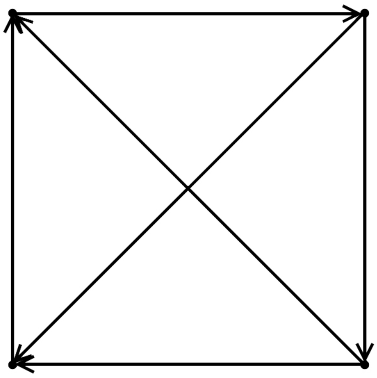

Рис. 2.2

2. Последовательности де Брёйна

Рассмотрим последовательность:

$$a_1, a_2, \dots, a_N: \ a_1 a_2 \dots a_n \quad \forall i \ a_i \in \{0, 1\},$$

где $a_1 a_2 \dots a_n$ — слова, состоящие из последовательности $a_1, a_2, \dots, a_N$. Понятно, что таких слов 2^n. Пусть эта последовательность устроена следующим образом:

$$\begin{aligned}
&a_1, a_2, \dots, a_n \text{ — слово из 0 и 1,}\\
&a_2, a_3, \dots, a_{n-1} \text{ — другое слово из 0 и 1,}\\
&\dots\\
&a_{N-n+1}, a_{N-n+2}, \dots, a_N \text{ — также другое слово из 0 и 1,}
\end{aligned}$$

то есть, чтобы в этом списке присутствовали все возможные слова длины n из 0 и 1, причем каждое — по одному разу. Тогда:

$$N = 2^n + n - 1.$$

Определение 8: *Последовательности, устроенные вышеописанным способом, называются* ***последовательностями де Брёйна****.* ♣

Есть два способа построить интересующее нас слово:

1. **Правило «0 лучше 1»**. Выставляем n единиц, далее ставим 0 столько времени, сколько возможно, то есть n нулей, так как поставь мы $n+1$ нулей, то возникло бы повторение — две последовательности из n нулей. Тогда далее ставим 1, потом снова 0 (помним, 0 лучше 1), пока это возможно, и так далее.

   Задача Доказать, что способ «0 лучше 1» приведет к построению последовательности де Брёйна. $*$

2. **Граф де Брёйна**. Разберем случай $n = 3$, далее покажем, как обобщить этот способ для произвольного n. Выпишем все последовательности длины 2 из нулей и единиц:

$$\begin{gathered}
00,\\
01,\\
10,\\
11.
\end{gathered}$$

Далее выпишем все слова длины 3:

$$000,$$
$$001,$$
$$010,$$
$$100,$$
$$011,$$
$$101,$$
$$110,$$
$$111.$$

Слова из двух букв расположим в вершинах графа, как на рис. 2.3.

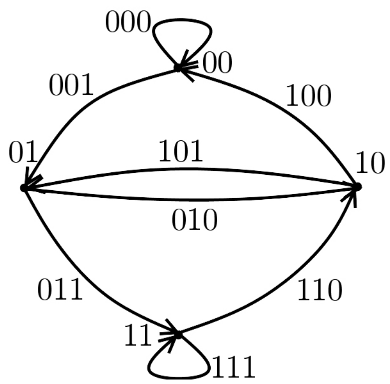

Рис. 2.3

Двигаясь по списку трехбуквенных слов, рисуем ребра графа с указанием направления обхода, руководствуясь следующим правилом: трехбуквенное слово, к примеру, 010 означает выход ребра из вершины 01 и окончание в вершине 10 с привязанным соответствующим направлением (стрелочкой).

Очевидно, что у такого графа исходящая степень каждой вершины равна её входящей степени. Поэтому мы можем применить критерий эйлеровости, следовательно, в графе де Брёйна есть эйлеров цикл.

Построим для этого графа конкретный эйлеров цикл, двигаясь, как на рис. 2.3. Например, выходим из вершины 000, идем в неё же, значит, записываем «000». Далее идем в вершину 01, следовательно, добавляем к строке 1, получим «0001». Затем идем в вершину 10, добавляем к строке 0, получим «00010» и так далее, следуя стрелкам на рис. 2.4. В итоге получим слово «0001011100».

Итак, по каждому ребру прошли ровно один раз, при этом прошли по всем ребрам. Таким образом, найдем все слова для случая $n = 3$.

В общем случае ($n \neq 3$) выпишем все слова из $n - 1$ букв в качестве вершин графа, а n-буквенные слова, аналогично случаю для $n = 3$, будут образовывать ребра. Далее действуем описанным выше способом.

3. Теорема Турана

Пусть есть граф $G = (V, E)$, $\alpha(G) = \alpha$ — его число независимости. Обозначим за $n = |V|$ количество его вершин. A — это максимальное по мощности независимое множество вершин G (см. рис. 2.4), следовательно:

$$|A| = \alpha.$$

Возьмем любую вершину:

$$\forall x \in V\ \ A.$$

Она соединена хотя бы одним ребром с A, так как это множество — максимально. Значит:

$$\forall x \in V\ \ A\ \exists y \in A : \{x, y\} \in E.$$

Таким образом, мы набрали как минимум $n - \alpha$ таких ребер. $G\ |_{V A}$ — граф, индуцированный на множество вершин $V\ \ A$

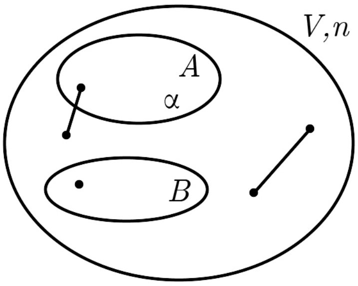

Рис. 2.4

Будем рассматривать часть графа, состоящую только из ребер, целиком принадлежащих множеству $V\ \ A$. Рассмотрим все такие ребра. Число независимости такого графа:

$$\alpha(G\ |_{V A}) \leqslant \alpha(G) \leqslant \alpha.$$

Теперь берем в $G\ |_{V A}$ максимальное по мощности независимое множество вершин B. Аналогично:

$$|B| \leqslant \alpha.$$

Снова каждая вершина:

$$\forall x \in V\ \ A\ \ B\ \exists y \in B : \{x, y\} \in E.$$

Таким образом, мы нашли новых ребер не меньше, чем $n - 2\alpha$. Продолжая действовать аналогично, приходим к теореме:

Теорема 8 (Турана) Если в G n вершин и $\alpha(G) = \alpha$, то:

$$|E| \geqslant n \cdot \left[\frac{n}{\alpha}\right] - \alpha \cdot \frac{\left[\frac{n}{\alpha}\right] \cdot \left(\left[\frac{n}{\alpha}\right] + 1\right)}{2}.$$

Суть теоремы заключается в том, что её необходимо использовать, когда имеется последовательность графов:

$$G_n : \ |V(G_n)| = n, \ \alpha(G_n) = \alpha_n, \text{ причём } \alpha_n = \overline{\overline{o}}(n),$$

тогда:

$$|E(G_n)| \gtrsim \frac{n^2}{2\alpha_n},$$

где знак $\gtrsim$ означает:

$$|E(G_n)| \geqslant (1 + o(1))\frac{n^2}{2\alpha_n},$$