ЛЕКЦИЯ 5

СВЯЗНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА. ТЕОРЕМА О ГИГАНТСКОЙ КОМПОНЕНТЕ. РАСКРАСКИ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

1. Связность случайного графа (доказательство).

Продолжим доказательство теоремы 11, начатое на прошлой лекции.

Док-во: Мы пришли к следующей сумме:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)}.$$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что эта сумма стремится к нулю. Пока что мы уже доказали, что:

$$C_n^1 (1-p)^{1(n-1)} \to 0.$$

Рассмотрим два случая:

$$k \geqslant \frac{n}{\ln\ln n}, \quad k < \frac{n}{\ln\ln n}.$$

<u>Случай 1</u>: $k \geqslant \frac{n}{\ln\ln n}$.

$$k \geqslant \frac{n}{\ln\ln n} \Rightarrow \quad (1-p)^{k(n-k)} \leqslant (1-p)^{\frac{n}{\ln\ln n}(n-k)} \leqslant$$
$$\leqslant (1-p)^{\frac{n}{\ln\ln n}\cdot\frac{n}{2}} = (1-p)^{\frac{n^2}{2\ln\ln n}} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-p \cdot \frac{n^2}{2\ln\ln n}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{cn}{2\ln\ln n} \cdot \ln n\right).$$

Заметим, что:

$$C_n^k \leqslant 2^n \Rightarrow \quad C_n^k (1-p)^{k(n-k)} \leqslant 2^n \cdot \exp\left(-\frac{cn\ln n}{2\ln\ln n}\right) \to 0.$$

Тогда:

$$\sum_{k \geqslant \frac{n}{\ln\ln n}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} < n \cdot 2^n \cdot \exp\left(-\frac{cn\ln n}{2\ln\ln n}\right) \to 0.$$

Первый случай доказан.
Случай 2: $k < \frac{n}{\ln\ln n}$.

$$\frac{C_n^{k+1} \cdot (1-p)^{(k+1)(n-k-1)}}{C_n^k \cdot (1-p)^{k(n-k)}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot (1-p)^{n-2k-1} \sim \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{n-2k} =$$

$$= \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{n-o(n)} = \frac{n-k}{k+1}(1-p)^{1+o(1)} \leqslant n\,\mathrm{e}^{-pn\left(1+o(n)\right)} =$$

$$= n\,\mathrm{e}^{(-c\ln n)\left(1+o(1)\right)} = n^{1-c\left(1+o(1)\right)}$$

По условию теоремы $c > 1$, следовательно:

$$\forall n \geqslant n_0 \quad n^{1-c\left(1+o(1)\right)} \leqslant n^{-\beta}, \quad \beta > 0.$$

Значит, отношение следующего шага к предыдущему начиная с некоторого момента оценивается одной и той же величиной $n^{-\beta}$, и тогда:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{\ln\ln n}} C_n^k (1-p)^{k(n-k)} \leqslant C_n^1 (1-p)^{n-1} \cdot (1 + n^{-\beta} + n^{-2\beta} + \ldots) \to 0,$$

так как:

$$1 + n^{-\beta} + n^{-2\beta} + \ldots) \to 1.$$

Тогда мы доказали, что в обоих случаях сумма стремится к нулю, чем завершили доказательство теоремы 11. ■

Теперь вернемся к теореме 12, которая утверждает, что при $c < 1$ исследуемый граф G асимптотически почти наверное не является связным. Для её доказательства докажем более сильное утверждение:

Теорема 17 Если p — вероятность ребра случайного графа, причем:

$$p = \frac{c \cdot \ln n}{n}, \quad c < 1,$$

тогда асимптотически почти наверное такой граф в модели Эрдеша–Реньи $G(n,p)$ содержит изолированные вершины. *

3 ! **_Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru._**

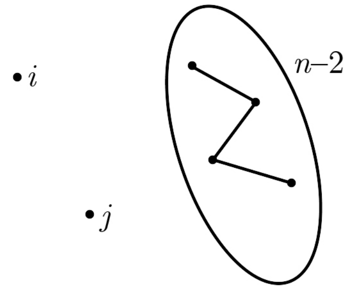

Рис. 5.1

Док-во: Пусть $\xi(G)$ — число изолированных вершин в графе G. Тогда наша цель — доказать, что:

$$P(\xi \geqslant 1) \to 1,$$

и тогда теорема будет доказана.

Напомним, что верхняя оценка для такой вероятности вытекает из неравенства Маркова.

Пользуясь тем, что ξ — целое неотрицательное число, проведем следующие рассуждения:

$$P(\xi \geqslant 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - P(\xi \leqslant 0) = 1 - P(-\xi \geqslant 0) = 1 - P(M\xi - \xi \geqslant M\xi).$$

Так как:

$$P(M\xi - \xi \geqslant \xi) \leqslant P(|M\xi - \xi| \geqslant M\xi),$$

то, воспользуясь также неравенством Чебышёва:

$$1 - P(M\xi - \xi \geqslant M\xi) \geqslant 1 - P(|M\xi - \xi| \geqslant M\xi) \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{(M\xi)^2}.$$

Таким образом, мы оценили снизу $P(\xi \geqslant 1)$. Теперь докажем, что:

$$\frac{D(\xi)}{(M\xi)^2} \to 0,$$

откуда будет следовать, что:

$$D \to 1.$$

Для начала оценим математическое ожидание:

$$M\xi = M(\xi_1 + \dots + \xi_n),$$

где:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{i-я вершина изолирована в случайном графе,} \\ 0, & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Пользуясь линейностью математического ожидания:

$$M\xi = M(\xi_1 + \dots + \xi_n) = M\xi_1 + \dots + M\xi_n = n(1-p)^{n-1} = n\,\mathrm{e}^{-pn\left(1+o(1)\right)} =$$
$$= n\,\mathrm{e}^{-(c\ln n)\left(1+o(1)\right)} = n^{1-c\left(1+o(1)\right)} \to \infty.$$

! **_Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu_**

! **_Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru._**

Вспомним также, что:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \tag{5.1}$$

Тогда посчитаем $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = M(\xi_1 + \dots + \xi_n)^2 = M\left(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j\right) = M\left(\xi_1 + \dots + \xi_n + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j\right) =$$
$$= M\xi + \sum_{i \neq j} M\xi_i\xi_j M\xi + n(n-1)(1-p)^{2n-3}.$$

Здесь мы воспользовались следующими наблюдениями:

$${\xi_i}^2 = \xi_i,$$

$$M(\xi_i \xi_j) = \begin{cases} 1, & \text{обе вершины изолированы,} \\ 0, & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Тогда пользуясь рис. 5.1 мы получили, что вероятность того, что обе вершины изолированы, равна $(1-p)^{2n-3}$.

Тогда подставим полученные математические ожидания в выражение для дисперсии (5.1):

$$P(\xi \geqslant 1) \geqslant \frac{M\xi + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - (M\xi)^2}{(M\xi)^2}.$$

Видим, что:

$$\frac{M\xi}{(M\xi)^2} \to 0, \quad \text{так как } M\xi \to \infty,$$

$$-\frac{M\xi^2}{M\xi^2} \to -1,$$

значит:

$$P(\xi \geqslant 1) \geqslant 1 - \overline{\overline{o}}(1) - 1 + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} = 1 + \overline{\overline{o}}(1) - 1 + 1 + \overline{\overline{o}}(1) \to 1,$$

и в итоге получаем:

$$P(\xi \geqslant 1) \to 1,$$

что и требовалось доказать. ■

2. Теорема о гигантской компоненте

Теорема 18 Пусть вероятность ребра случайного графа:

$$p = \frac{c}{n}, \quad c = const.$$

Тогда:

! **_Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu_**

! **_Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru._**

1. Если $c < 1$, то:

$$\exists\beta : P(\text{размер максимальной компоненты связности } G(n,p) \geqslant \beta\ln n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.2}$$

2. Если $c > 1$, то:

$$\exists\beta \geqslant 0, \gamma \geqslant 0 : P(\exists \text{ связная компонента в } G(n,p) \text{ размера } \geqslant \gamma_n, \text{ и все остальные компоненты имеют размеры} \leqslant \beta\ln n) \to 1, \quad n \to \infty. \tag{5.3}$$

$*$

В данном курсе теорема приводится без доказательства.

Рассмотрим иллюстрацию данной теоремы:

Пример 6 Представим такую картину мира, которую иллюстрирует рис. 5.2. Тогда p является осью времени, а при времени до $\frac{1}{n}$ мир состоит из маленьких логарифмических княжеств — период феодализма.

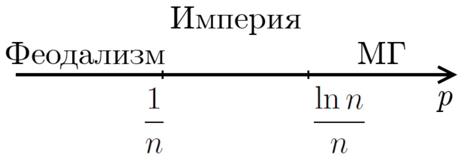

Рис. 5.2

Затем происходит скачок к возникновению гигантской компоненты — некой империи, собравшей в себе много княжеств. Заметим, что империя появляется в единственном числе, что является неким законом природы. Сейчас она окружена варварскими племенами.

При наступлении времени $\frac{\ln n}{n}$ наступает мировое господство империи (МГ) — она полностью захватывает в себя все племена.

Заметим, что мир устроен гораздо сложнее, и в частности, применительно к настоящему миру непонятно, что является временем $\frac{1}{n}$ и временем $\frac{\ln n}{n}$. Таким образом, конечно случайный граф не совсем описывает реальный мир, хотя данный пример и является запоминающейся иллюстрацией теоремы 18. $*$

3. Раскраски случайных графов

Определение 14: Хроматическим числом *графа $G(n,p)$ называется минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить вершины графа, чтобы вершины, соединенные ребром, были разного цвета:*

$$\chi(G) = min\{\chi : V = V_1 \sqcup ... \sqcup V_\chi \quad \forall i, \forall x, y \in V_i : \{x,y\} \notin E\}.$$

Рассмотрим следующую интерпретацию применения хроматического числа графа: имеется тюрьма с камерами, в нее поступают заключенные. Необходимо расселить заключенных по камерам таким образом, чтобы в одной камере не оказались люди, которые могут друг друга убить.

! **_Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на_** pulsar@phystech.edu

Понятно, что для этого нужно построить граф, вершинами которого будут являться заключенные, а ребрами соединим ненавидящих друг друга людей. Тогда хроматическое число данного графа есть минимальное количество камер, необходимых для решения сложившейся ситуации.

Более классическая задача на хроматическое число графа — это проблема четырех красок. Имеется граф, вершины которого — различные страны, а ребра соединяют пары стран, граничащих между собой. Необходимо покрасить граф так, чтобы получилась разумная карта. Заметим, что каждый цвет является независимым множеством, а значит, что связь хроматического числа с числом независимости:

$$\chi(G) \geqslant \left[\frac{|V|}{\alpha(G)}\right].$$

Введем следующее обозначение: $\omega(G)$ — размер максимальной **клики**, то есть полного подграфа.

Видим, что $\omega(G)$ есть двойственная характеристика по отношению к $\alpha(G)$, так как размер максимальной клики графа есть число независимости его дополнительного графа (то есть графа, который получается путем стирания исходных ребер и дорисовки несуществующих в исходном графе ребер).

Очевидно, что:

$$\chi(G) \geqslant \omega(G),$$

так как чтобы покрасить граф, заведомо нужно покрасить каждую его клику.

Теорема 19 В графе $G\left(n, \frac{1}{2}\right)$ асимптотически почти наверное:

$$\alpha(G) \leqslant 2\log_2 n.$$

Замечание Доказав данную теорему, автоматически докажем то же утверждение для $\omega(G)$, так как вероятность ребра есть $\frac{1}{2}$, и в этом случае α и ω являются одинаково распределенными случайными величинами. *

Док-во: Пусть $\xi_k(G)$ — число независимых множеств на k вершинах в случайном графе.

Возьмем:

$$k = [2\log_2 n].$$

Тогда:

$$M\xi_k = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{C_k^2} \leqslant \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} \leqslant \frac{n^{2\log_2 n}}{k!} \cdot 2^{-\frac{(2\log_2 n-1)^2}{2}+\log_2 n} =$$
$$= \frac{2^{2(\log_2 n)^2}}{k!} \cdot 2^{-2(\log_2 n)^2+2\log_2 n-\frac{1}{2}+\log_2 n} < \frac{2^{3\log_2 n}}{k!} \to 0, \quad (5.4)$$

так как знаменатель последней дроби растет гораздо быстрее числителя.

Получаем:

$$P(\xi_k \geqslant 1) \leqslant M\xi_k \to 0 \Rightarrow \quad P(\alpha(G) \geqslant k) \Rightarrow \quad \alpha(G) \leqslant 2\log_2 n,$$

теорема доказана. ■

! **_Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru._**

Рекомендуется выполнить самостоятельно следующие упражнения:

Задача Доказать, что асимптотически почти наверное:

$$\alpha(G(n, \frac{1}{2})) \geqslant (1 - o(1)) \cdot 2\log_2 n.$$

Замечание Упражнение 6 решается с помощью неравенства Чебышёва аналогично второй части доказательства теоремы 17. $*$

Задача

1. $p = o(\frac{1}{n^2})$. Доказать, что асимптотически почти наверное:
$$\chi(G(n, p)) = 1.$$
2. $p = o(\frac{1}{n})$. Доказать, что асимптотически почти наверное:
$$\chi(G(n, p)) \leqslant 2.$$
3. $*$ $p = \frac{c}{n}, c < 1$. Доказать, что асимптотически почти наверное все компоненты случайного графа либо деревья, либо унициклические графы, и тогда:
$$\chi(G(n, p)) \leqslant 3.$$

! **_Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu_**