ЛЕКЦИЯ 8

КНЕЗЕРОВСКИЙ ГРАФ

1. Немного истории

На прошлой лекции была рассмотрена и доказана теорема **??** (Эрдеша, Ко, Радо). Приведем краткую дальнейшую историю развития исследуемой темы.

Теорема 27 (1978, Франкл)

$$n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1), \quad k \geqslant 15.$$

То есть из-за ограничения на k теорема оказалась чуть-чуть «недодоказана» Франклом. Через два года доказательство было завершено им вместе с Уилсоном:

Теорема 28 (1980, Франкл, Уилсон)

$$n_0(k,t) = (k-t+1)(t+1).$$

Еще позже проблема была полностью решена, то есть было найдено точное значение для $f(n,k,t)$ для всех k и t:

Теорема 29 (1996, Алсведе, Хачатрян) Пусть:

$$k < \frac{n+t}{2}.$$

Пусть, далее, r — это такое натуральное число либо ноль, что:

$$(k-t+1)\cdot\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) \leqslant n < (k-t+1)\cdot\left(2+\frac{t-1}{[}h]\right).$$

Тогда:

$$f(n,k,t) = \left|\Big\{F \subset \{1,2,\dots,n\}: \quad |F| = k, \quad \big|F \cap \{1,2,\dots,t+2r\}\big| \geqslant t+r\Big\}\right| = \mathfrak{F}(n,k,t).$$

Замечание $r = 0$ тогда и только тогда, когда:

$$n \geqslant (k - t + 1)(t + 1) = n_0.$$

В таком случае:

$$\mathfrak{F}(n, k, t) = \Big\{ F \subset \{1, 2, \dots, n\} : \quad |F| = k, \quad \big|F \cap \{1, 2, \dots, t\}\big| \geqslant t \Big\},$$

то есть частным случаем данной теоремы будет теорема 28. $*$

Замечание Если:

$$\mathfrak{F}(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}) = \Big\{ F \subset \{1, 2, \dots, n\} : \quad |F| = \frac{n}{2}, \quad \big|F \cap \{1, 2, \dots, \sim \frac{n}{2}\}\big| \geqslant \sim \frac{3n}{8} \Big\},$$

то есть как раз тот случай, что был рассмотрен на предыдущей лекции. $*$

Доказательство приводиться не будет, но смысл теоремы необходимо понять.

2. Кнезеровский граф

Определение 20: Кнезеровский граф *$KG_{n,k} = (V_{n,k}, E_{n,k})$ есть граф, построенный следующим образом: если есть n-элементное множество:*

$$R_n = \{1, 2, \dots, n\},$$

то все возможные его k-элементные подмножества будут служить вершинами $KG_{n,k}$:

$$V_{n,k} = C^k_{R_n}.$$

Таким образом количество вершин кнезеровского графа есть C^k_n. Обозначим вершины:

$$V_{n,k} = \{K_1, \dots, K_{C^k_n}\}.$$

Ребро $\{K_i, K_j\}$ образуется тогда и только тогда, когда:

$$K_i \cap K_j = \emptyset.$$

Пример 8

1. Если:
$$k > \frac{n}{2},$$
то граф $KG_{n,k}$ — пустой, так как любые два множества пересекаются.

2. Если:
$$k = \frac{n}{2},$$

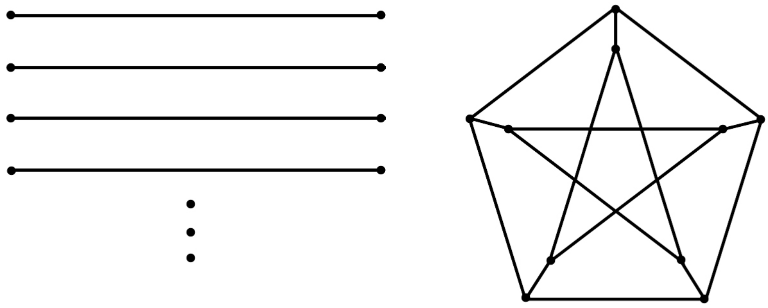

Рис. 8.1

то кнезеровский граф есть набор отдельных ребер (*паросочетание*), как показано на рис. **??**.

Поясним термин «паросочетание» на следующей интерпретации: пусть есть множество молодых людей и множество девушек. У каждого из них есть свои предпочтения при выборе партнера. Парасочетание — это возможность разбить их на супружеские пары, в которых партнеры будут друг друга удовлетворять.

Поиск паросочетаний является серьезной алгоритмической задачей.

3. Если:
$$k = 1,$$
то:
$$KG_{n,k} = K_n,$$
то есть полный граф на n вершинах.

4. Если:
$$n = 5, \quad k = 2,$$
то кнезеровский граф изоморфен графу Петерсена, который показан на рис. **??**. $*$

Разберемся, чему равняются кликовое число, число независимости и хроматическое число кнезеровского графа.

Первые два числа находятся очевидно:

$$\omega(KG_{n,k}) = \left[\frac{n}{k}\right],$$

$$\alpha(KG_{n,k}) = f(n,k,1).$$

Задачей оценкой хроматического числа, то есть поиска оптимальной покраски кнезеровского графа, занимался Кнезер:

Теорема 30 (1957, Кнезер)

$$\chi(KG_{n,k}) \leqslant n - 2k + 2.$$

Док-во: Есть множество:

$$\{1, 2, \dots, n\}.$$

Возьмем первый элемент и посмотрим на все вершины кнезеровского графа, которые его содержат. Их можно покрасить в один цвет, так как они пересекаются по первому элементу множества. Пусть это будет первый цвет.

Во второй цвет покрасим те вершины, которые содержат второй элемент множества и которые уже не покрашены в первый цвет.

Проделаем такую покраску до элемента с номером $n - 2k + 1$. Покрасим соответствующие множества аналогично в $(n - 2k + 1)$-й цвет.

После проделанных шагов остались непокрашенными те k-элементные множества, которые лежат на элементах:

$$n - 2k + 2, \dots, n.$$

Мощность такого множества есть $2k - 1$. Получается, что k-элементные множества целиком лежат в $(2k - 1)$-элементном множестве, значит, они попарно пересекаются и, следовательно, их можно покрасить в один цвет.

Теорема доказана. ■

Кнезер пытался найти хоть какие-то параметры n и k, с которыми можно было бы улучшить верхнюю оценку. Ему это не удалось. Тогда он высказал гипотезу:

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2, \quad k \leqslant \frac{n}{2}.$$

Стандартными комбинаторными методами доказать эту гипотезу не получалось. Тогда в конце семидесятых годов Ласло Ловас предложил использовать для доказательства **топологию**.

Для начала сформулируем вспомогательную теорему, которая будет доказана на следующей лекции, пока же она поможет в доказательстве теоремы Ловаса:

Теорема 31 (Борсук, Улам, Люстерник, Шнирельман) Пусть есть сфера в n-мерном пространстве:

$$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что:

$$S^{n-1} = A_1 \cup \dots A_n,$$

где A_i — либо замкнутое, либо открытое множество.

Тогда:

$$\exists\, i,\ \exists\, \overline{x} \in A_i : \quad -\overline{x} \in A_i.$$

Замечание Теорема очевидна для одномерной окружности на двумерной плоскости. ∗

Теперь сформулируем и докажем теорему Ловаса, приведенный вид доказательства которой принадлежит Грину:

Теорема 32

$$\chi(KG_{n,k}) \geqslant n - 2k + 2.$$

Док-во: Предположим противное:

$$\chi(KG_{n,k}) \leqslant n - 2k + 1 = d.$$

Цвета в соответствующей покраске обозначим:

$$\chi_1, \dots, \chi_d,$$

то есть:

$$\forall\ K_i\ \exists\ \chi_j : \quad \chi_j \text{ — цвет } K_i : \quad \text{если } K_\nu \cap K_\mu = \emptyset \Rightarrow$$

соответствующие цвета — разные.

Есть множество:

$$R_n = 1, 2, \dots, n.$$

Расположим это множество на d-мерной сфере в $d+1$-мерном пространстве:

$$R_n \to \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \subset S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Таких расположений — континуально много. Выберем это расположение с умом, пользуясь понятием *экватор*:

Определение 21: Экватор *(экваториальное сечение) сферы S^d — это любая сфера S^{d-1}, которая получена в результате пересечения S^d с гиперплоскостью, проходящей через центр S^d (начало координат).* ♣

Нарисуем d-мерную сферу,$d = 2$, $n > 2$. Теперь случайно раскидаем n точек по сфере (см. рис. 8.2). Выберем случайные точки 1 и 2.

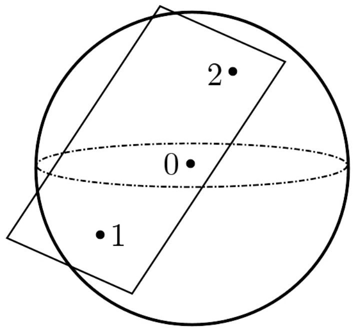

Рис. 8.2

Вероятнее всего не может случиться, чтобы точки 1, 2 и 0 лежали на одной прямой. Поэтому можно провести центральное сечение, проходящее через точки 0, 1 и 2. Оно задает соответствующий экватор.

Значит, третью точку можем выбрать где угодно вне экватора, таким образом, сможем расположить точки желаемым образом.

Введем еще одно вспомогательное определение:

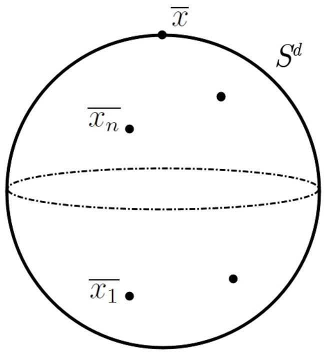

Рис. 8.3

***Определение 22: Открытая верхняя полусфера** $H(\overline{x})$ с эпицентром в точке $\overline{x}$ — это полусфера, содержащая точку $\overline{x}$ и не содержащая своего экватора.* ♣

Определим при $j = 1$,...,d (см. рис. 8.3):

$$A_j : \Big\{ \overline{x} \in S^d : \quad \text{в } H(\overline{x}) \text{ есть хотя бы одно множество } \overline{x_{i_1}}, \ldots, \overline{x_{i_k}} : \quad i_1, \ldots, i_k \text{ имеет цвет } \chi_j \Big\}.$$

Важно отметить, что A_j — открытое множество, то есть если какой-то $\overline{x}$ принадлежит A_j, то немного его «пошевелив», останемся внутри A_j. Тогда A_{d+1} завершает покрытие:

$$A_{d+1} = \Big\{ \overline{x} \in S^d : \quad \big| H(\overline{x}) \cap \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\} \big| \leqslant k-1 \Big\}.$$

В совокупности A_d и A_{d+1} покрывают сферу:

$$S^d = A_1 \cup \ldots A_{d+1},$$

следовательно, по теореме Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана:

$$\exists\, \overline{x} \in A_i : \quad -\overline{x} \in A_i.$$

Случай 1: $i = 1, \ldots, d$.

Для данного случая построим рис. 8.4.

Из того, что $\overline{x} \in A_i$ следует, что есть k точек $\overline{x_{i_1}}, \ldots, \overline{x_{i_k}}$, таких, что множество $\{i_1, \ldots, i_k\}$ — цвета χ_i.

Из того, что $-\overline{x} \in A_i$ следует, что есть k точек $\overline{x_{j_1}}, \ldots, \overline{x_{j_k}}$, таких, что множество $\{j_1, \ldots, j_k\}$ — тоже цвета χ_i.

Так как наборы точек не пересекаются, то есть два k-элементных множества, не пересекающихся и имеющих один и тот же цвет.

Так не бывает.

Случай 2: $\overline{x} \in A_{d+1}$.

Для данного случая построим рис. 8.5.

В верхней полусфере, отвечающей $\overline{x}$, не больше $k-1$ точек из множества $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$.

Во второй полусфере, отвечающей $\overline{-x}$, также не больше $k-1$ таких точек.

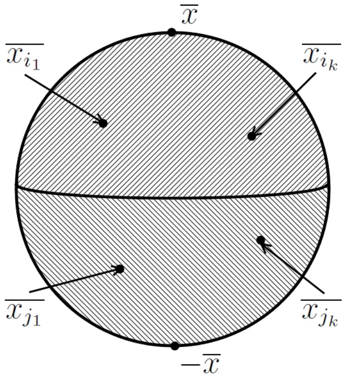

Рис. 8.4

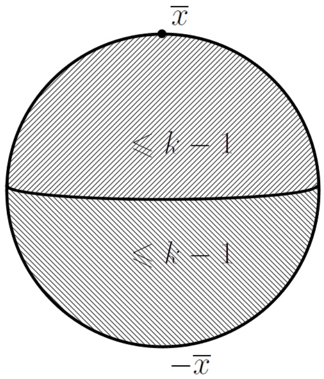

Рис. 8.5

Всего точек n. Значит, оставшиеся лежат на экваторе, и получается, что на нем находится не меньше точек, чем:

$$n - 2(k-1) = n - 2k + 2 = d + 1.$$

Но по проведенному расположению на любом экваторе меньше, чем d точек.
Пришли к противоречию в обоих случаях, следовательно, теорема доказана. ■