ЛЕКЦИЯ 9

ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД В КОМБИНАТОРИКЕ

1. Теорема Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана (доказательство)

На предыдущей лекции в качестве вспомогательной теоремы была использована теорема 31 — теорема Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана. Докажем эту теорему для случаев $n = 2, 3$.

Док-во: Случай $n = 2$:
В этом случае окружность покрыта двумя замкнутыми множествами:

$$S^1 = A_1 \cup A_2.$$

Утверждается, что хотя бы одно из этих множеств непременно содержит противоположные точки на окружности.

5.2cm

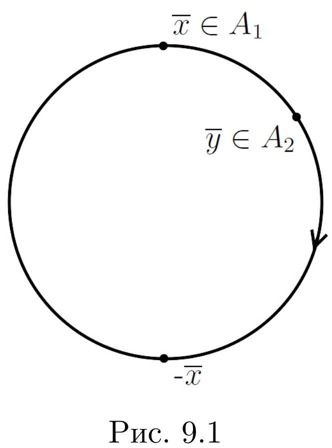

Рис. 9.1

Тогда нарисуем окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (см. рис. 9.1). Рассмотрим точку:

$$\overline{x} \in A_1.$$

Предполагая от противного, что:

$$-\overline{x} \notin A_1,$$

будем двигаться по часовой стрелке (для определенности) от точки $\overline{x}$ к её диаметрально противоположной — $-\overline{x}$.

Поскольку множество A_1 является замкнутым, в процессе этого движения в какой-то момент придется натолкнуться на последнюю точку множества A_1. Назовем эту точку $\overline{y}$.

Последняя точка A_1 в то же время обязана принадлежать A_2 тоже, что является следствием замкнутости, так как иначе эта точка находится в дополнении до замкнутого множества, которое — открыто. Значит, за $\overline{y}$ есть еще какие-то точки, которые не принадлежат A_2, но (по выбору точки) этого не может быть. Получается:

$$\overline{y} \in A_1, \quad \overline{y} \in A_2.$$

Соответственно:

$$-\overline{y} \in A_1 \quad \text{либо} \quad -\overline{y} \in A_2.$$

Антиподальные точки найдены, случай $n = 2$ разобран.

Случай $n = 3$:

Теперь:

$$S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

каждое из которых — замкнуто.

Предположим противное: ни в одном A_i нет одновременно точек $\overline{x}$ и $-\overline{x}$. В частности, A_1 не содержит противоположных точек, следовательно, в нем не содержится расстояние, равное диаметру всей сферы, но раз множество замкнуто, то его диаметр меньше диаметра сферы:

$$D_{A_1} < 2,$$

так как единичная сфера имеет диаметр, равный 2.

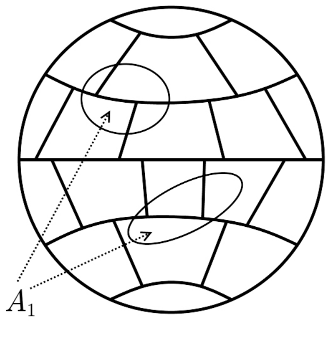

Рис. 9.2

Нарисуем на сфере параллели, а вместо меридианов замостим сферу «кирпичиками», как показано на рис. 9.2, то есть запретив стыки «крест-накрест», а используя только Т-образные стыки. Каждый полюс сферы также является «кирпичиком».

Рассмотрим множество G_1 — объединение всех «кирпичиков», которые пересекают множество A_1.

Заметим, что если изначальную кладку выполнить очень мелкой, то диаметр G_1 по прежнему будет меньше 2, то есть, это множество также не содержит антиподальных точек и замкнуто из-за замкнутости «кирпичиков».

Также необходимо отметить, что устройство границы G_1 таково: она представляет из себя набор попарно непересекающихся и несамопересекающихся ломаных, что обусловлено запретом стыков «крест-накрест».

Теперь рассмотрим множество G_1', которое симметрично множеству G_1 относительно начала координат. Эти множества между собой никак не пересекаются, поскольку в G_1 нет антиподальных точек и его диаметр меньше. Таким образом, пересечения этих двух множеств нет даже по границе:

$$G_1 \cap G_1' = \emptyset.$$

Однако устройство G_1' — аналогично устройству G_1 с точностью до знака относительно начала координат.

Обозначим через $L_1, \ldots, L_k$ — ломаные, ограничивающие G_1, соответственно через $L_1', \ldots, L_k'$ обозначим ломаные, ограничивающие G_1'.

Воспользуемся известным фактом — теоремой Жордана, примененной к данной ситуации. Если на сфере есть $2k$ несамопересекающихся и попарно непересекающихся ломаных, то сфера разбивается на $2k+1$ связных частей. Среди них могут быть пары симметричных друг другу.

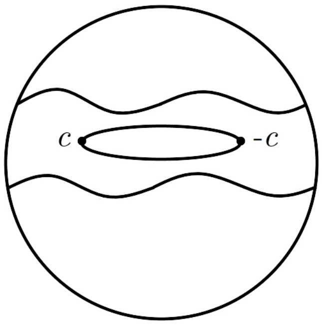

Рис. 9.3

Но частей нечетной число, значит есть хотя бы одна центрально-симметричная часть, то есть симметричная самой себе, как показано на рис. 9.3.

Эта часть не пересекается с $G_1 \cup G_1'$. Но G_1 и G_1' по построению целиком содержат внутри себя A_1. Тогда получившийся «поясок» целиком покрыт $A_2 \cup A_3$.

Возьмем произвольную точку c внутри «пояска». Из-за центральной симметрии части можно найти симметричную ей точку $-c$. Поскольку каждая часть является связным множеством, то существует непрерывная кривая, которая расположена целиком внутри «пояска» и соединяет c и $-c$.

Также из-за центральной симметричности «пояска» эту кривую можно отразить и соединить c и $-c$ с другой стороны аналогичной кривой. Получилась почти окружность, а для нее был доказан случай $n = 2$.

Таким образом, пришли к противоречию, так как если бы вся сфера была покрыта тремя замкнутыми множествами, то нашлось бы центрально-симметричное множество, в котором нашелся бы аналог окружности, покрытой двумя замкнутыми множествами. Задача сведена к случаю $n = 2$. ■

В общем случае теорема доказывается также по индукции, но шаг индукции является довольно сложным. Общая идея доказательства объяснена. Полное доказательство можно найти в книге *Using the Borsuk-Ulam theorem, Matousek*.

2. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

В последнее время на лекциях изучалась величина $f(n, k, t)$, которая равняется максимальному количеству ребер в k-однородном гиперграфе на n вершинах, любые два ребра которого пересекаются не менее, чем по t. Кнезеровский граф оказался очень тесно связан с такой величиной — он имеет число независимости, совпадающее с $f(n, k, 1)$. Также был рассмотрен дистанционный граф вида $G(n, r, s)$.

Введем следующую величину:

Определение 23:

$$m(n,k,t) = \max\Big\{|E|:\ \exists H = H(V,E),\ |V| = n,\ \forall e \in E\ |e| = k,\quad \forall e,f \in E\ |e \cap f| \neq t\Big\}.$$

Утверждение 2

$$m(n,k,t) \geqslant f(n,k,t+1).$$

Напомним, что такое $G(n, 3, 1) = (V, E)$ (см. пример 1):

$$V = \Big\{\overline{x} = (x_1 \dots x_n):\ x_i \in \{0,1\},\ x_1 + \dots + x_n = 3\Big\},$$

то есть $k = 3$, также:

$$E = \big\{\{\overline{x}, \overline{y}\}:\ (\overline{x}, \overline{y}) = 1\big\}.$$

Итак, рассматривается k-однородный гиперграф, у которого:

$$\alpha(G(n,3,1)) = m(n,3,1).$$

Теперь вспомним также следующее:

$$m(n,3,1) = \begin{cases} n, & n \equiv 0(4), \\ n-1, & n \equiv 1(4), \\ n-2, & n \equiv 2(4),\ n \equiv 3(4). \end{cases}$$

Тогда необходимо сформулировать в новых терминах теорему 5, которая доказывается с помощью **линейно-алгебраического метода**.

Теорема 33

$$m(n,3,1) \leqslant n.$$

Док-во: Будем действовать в новых терминах.

Пусть дан произвольный 3-однородный гиперграф $H(V, E)$, у которого n вершин и любые два ребра не пересекаются по одной вершине. Всякий раз, когда появляется подобная конструкция, будем заменять ее на конструкцию с векторами.

Тогда поставим каждому ребру в соответствие вектор с тремя единицами в качестве координат и $n-3$ нулями. Тогда любые два вектора в скалярном произведении не дают 1.

Обозначим: $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$ — все векторы, отвечающие ребрам из множества E (то есть r — мощность E).

Цель: доказать, что $r \leqslant n$. Докажем, что векторы $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$ — линейно-независимы над $\mathbb{Z}_2$ — полем из двух элементов. Поскольку все векторы n-мерные, из этого как раз будет следовать неравенство $r \leqslant n$.

Предположим:

$$c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} + \dots + c_r\overline{x_r} \equiv 0(2), \quad c_i \in Z_2, \tag{9.1}$$

то есть c_i — нули или единицы. Если докажем, что векторы — линейно-независимы, то такое возможно, только если все константы равны нулю.

Домножим обе части сравнения скалярно на вектор $\overline{x_1}$:

$$c_1(\overline{x_1}, \overline{x_1}) + c_2(\overline{x_2}, \overline{x_1}) + \dots + c_r(\overline{x_r}, \overline{x_1}) \equiv 0(2).$$

Так как скалярный квадрат двух векторов из трех единиц равен 3, а, по условию, $(\overline{x_1}, \overline{x_j}) \neq 1$, то оно 0 или 2, значит:

$$c_2(\overline{x_2}, \overline{x_1}) = \dots = c_r(\overline{x_r}, \overline{x_1}) \equiv 0(2).$$

Тогда получается:

$$c_1 \cdot 3 + 0(2) \equiv 0(2),$$

$$c_1 \equiv 0(2).$$

Теперь аналогично скалярно домножим выражение (9.1) на $\overline{x_2}$, получим:

$$c_2 \equiv 0(2).$$

Проделаем аналогичную операцию для всех векторов, получим, что все константы равны нулю. Значит, эти векторы — линейно независимы. А если n-мерные векторы линейно независимы, то их не больше, чем n, что и требовалось доказать. ∎

Теорема 34

$$m(n, 5, 2) \leqslant C_n^2.$$

Замечание

$$m(n, 5, 2) \geqslant f(n, 5, 3) = C_{n-3}^{5-3} = C_{n-3}^2 \sim C_n^2.$$

Док-во: Снова берем гиперграф и по нему строим векторы $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r}$. Из условия следует, что в каждом — 5 единиц и $n-5$ нулей, а также:

$$\forall i,j \quad (\overline{x_i},\overline{x_j}) \neq 2; \quad (\overline{x_i},\overline{x_i}) = 5.$$

В этой ситуации вовсе нельзя доказать, что векторы — линейно-независимы. Однако можно доказать линейную независимость определенных *многочленов*.

Поставим в соответствие каждому вектору $\overline{x_i}$ многочлен от n переменных:

$$F_{\overline{x_i}} \in \mathbb{Z}[y_1,\dots,y_n]; \quad F_{\overline{x_i}}(\overline{y}) = (\overline{x},\overline{y})((\overline{x},\overline{y})-1).$$

Поясним устройство данного многочлена примером:

Пример 9

$$F_{1,1,1,1,1,0,\dots,0}(\overline{y}) = (y_1+\dots+y_5)(y_1+\dots+y_5-1) =$$
$$= y_1^2+\dots+y_2^2+2(y_1y_2+\dots+y_4y_5)-(y_1+\dots+y_5). \quad *$$

Так как рассматриваются только нули и единицы, то:

$$y_1^2+\dots+y_5^2 = y_1+\dots+y_5,$$

значит:

$$F_{1,1,1,1,1,0,\dots,0}(\overline{y}) = 2(y_1y_2+\dots+y_4y_5).$$

Тогда заменим многочлен $F_{\overline{x_i}}$ на многочлен $\tilde{F}_{\overline{x_i}}$, полученный в результате удвоенного суммирования попарно перемноженных переменных.

Утверждается, что такие многочлены $\tilde{F}_{\overline{x_i}}$, построенные по векторам $\overline{x_1},\dots,\overline{x_r}$, являются линейно-независимыми над полем $\mathbb{Z}_3$. Докажем это.

Возьмем линейную комбинацию этих многочленов и предположим, что она нулевая как многочлен:

$$c_1\tilde{F}_{\overline{x_1}}(\overline{y})+\dots+c_r\tilde{F}_{\overline{x_r}}(\overline{y}) = 0(3).$$

Можно записать это выражение не просто в алгебраическом виде, а как функцию:

$$c_1\tilde{F}_{\overline{x_1}}(\overline{y})+\dots+c_r\tilde{F}_{\overline{x_r}}(\overline{y}) = 0(3), \quad \forall y.$$

Возьмем в качестве $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \overline{x_1}.$$

Тогда, учитывая, что $(\overline{x_1 x_1})$ может равняться 0,1,3 или 4:

$$\tilde{F}_{\overline{x_1}}(\overline{x_1}) = F_{\overline{x_1}}(\overline{x_1}) = (\overline{x_1},\overline{x_1})((\overline{x_1},\overline{x_1})-1) \equiv 0(3),$$

так как исключен вычет, равный 2.

Значит, когда вместо $\overline{y}$ был подставлен $\overline{x_1}$:

$$c_1\tilde{F}_{\overline{x_1}}(\overline{y})+0(3) = \dots+0(3) \equiv 0(3),$$

следовательно:

$$c_1 \equiv 0(3).$$

Аналогично покажем, что c_2 и остальные коэффициенты также сравнимы с нулем, значит, эти многочлены — линейно-независимы над $\mathbb{Z}_3$.

Тогда их количество оценивается размерностью пространства, в котором они расположены. Базис в этом пространстве составляют выражения вида:

$$y_1 y_2, \cdots, y_{n-1} y_n.$$

Число таких выражений — C_n^2, значит размерность пространства и есть C_n^2. Тогда:

$$r \leqslant C_n^2,$$

что и требовалось доказать. ■

Обобщение этого рассуждения будет рассмотрено на следующей лекции.