# ЛЕКЦИЯ 11

# ЧИСЛА РАМСЕЯ

***Определение 26:*** ***Числом Рамсея*** *называется такое $R(s,t)$ (где $s$ и $t$ — натуральные числа) которое определяется следующим образом:*

$$R(s,t) = \min\{n \in N: \text{ при } \forall \text{ раскраске ребер полного графа на } n \text{ вершинах } K_n \text{ в красный и синий цвета либо } \exists K_s \subset K_n, \text{ у которого все ребра — красные, либо } \exists K_t \subset K_n, \text{ у которого все ребра — синие}\}. \quad \clubsuit$$

Тривиально, что:

$$R(1,t) = 1,$$

так как у графа на одной вершине нет ребер; это сравнимо с утверждением «Все крокодилы в Москва-реке — красные».

Почти очевидно, что:

$$R(2,t) = t.$$

**Задача** Найти:

$$R(3,t) = ?$$

Классической школьной задачей является:

$$R(3,3) \leqslant 6,$$

что можно интерпретировать следующим образом: из шести людей либо есть трое попарно знакомых, либо есть трое попарно незнакомых. В данной ситуации ребра, которые отвечают знакомству, можно считать красными, которые отвечают незнакомству — синими.

Легко доказать, что для 5 человек такое утверждение уже неверно, тогда получаем равенство:

$$R(3,3) = 6.$$

Заметим также:

$$R(s,t) = R(t,s),$$

что означает симметричность числа Рамсея.

Есть также определение, равносильное определению 26:

***Определение 27:***

$$R(s,t) = \min\{n \in N : \ \forall G = (V,E), \ |V| = n \text{ либо } \omega(G) \geqslant s, \text{ либо } \alpha(G) \geqslant t\}.$$

Определения 26 и 27 — эквивалентны, потому что положим, например, что красные ребра — это ребра графа $G$, а синие ребра — это те ребра, которых в графе $G$ нет. Тогда тот факт, что в $G$ есть клика на $s$ вершинах, равносилен тому, что существует красный $K_s$, а тот факт, что в $G$ есть независимое множество на $t$ вершинах, равносилен тому, что среди ребер, которых не было в графе $G$, есть клика на $t$ вершинах.

**Теорема 44**

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

**Док-во:** Обозначим:

$$n = R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Выберем произвольную вершину графа, обозначим ее $x$ (см. рис. 11.1). Затем зафиксируем произвольную раскраску ребер.

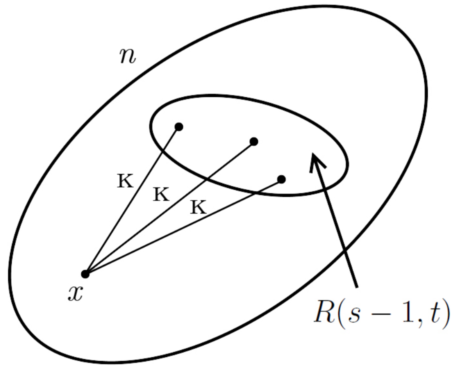


Рис. 11.1

Цель: доказать, что в этой раскраске либо найдется $K_s$, у которого все ребра — красные, либо найдется $K_t$, у которого все ребра — синие.

Рассмотрим те ребра, которые смежны с вершиной $x$. В выбранной раскраске часть из них — красные, часть — синие.

Случай 1: красных ребер, которые смежны с $x$, не меньше, чем $R(s-1,t)$.

Случай 2: синих ребер, которые смежны с $x$, не меньше, чем $R(s,t-1)$.

Рассмотрим только первый случай, поскольку второй случай полностью ему идентичен.

Смотрим на полный подграф, образованный концами красных ребер. Ребра, которые образуются в этом подграфе, тоже как-то раскрашены.

Тогда, по определению числа Рамсея, либо среди этих ребер найдется полный подграф на $s-1$ вершинах $K_{s-1}$, у которого все ребра — красные, либо найдется полный подграф на $t$ вершинах $K_t$, у которого все ребра — красные

Во втором случае сразу получается, что раз нашли $K_t$ в подграфе, то нашли его и в цельном графе.

В случае $K_{s-1}$ добавим к нему вершину $x$, которая соединена с каждой вершиной $K_{s-1}$ красным ребром. Значит, вместе с вершиной $x$ получим $K_s$, у которого все ребра — красные.

Теорема доказана. ∎

**Следствия:**

$$R(s,t) \leqslant C_{s+t-2}^{s-1}.$$

**Док-во:** Вспомним комбинаторное тождество — треугольник Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Установленное неравенство

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

содержит внутри себя эту рекурсию при определенных $n$ и $k$. Найдем такие $n$ и $k$:

$$C_{s+t-2}^{s-1} \leqslant C_{s-1+t-2}^{s-2} + C_{s+t-3}^{s-1},$$

следовательно, получим:

$$k = s-1, \quad n = s+t-2.$$

Проверка начальных условий:

$$C_{1+t-2}^{1-1} = 1,$$

что в свою очередь вполне согласуется с вышеобоснованным утверждением о крокодилах в Москва-реке. ∎

**Следствия: Диагональное число Рамсея**:

$$R(s,s) \leqslant C_{2s-2}^{s-1} \sim \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}.$$

Заметим, что при $s=3$:

$$R(3,3) \leqslant 6,$$

значит, утверждение о шести знакомых людях проверено.

**Теорема 45**

$$R(s,s) \geqslant (1+o(1))\frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}.$$

**Док-во:** По определению:

$$R(s,s) > n,$$

что равносильно тому, что существует раскраска $K_n$, в которой нет одноцветных $K_s$. Это утверждение в свою очередь равносильно существованию графа на $n$ вершинах, у которого:

$$\exists G = (V,E),\ |V| = n:\ \omega(G) < s, \quad \alpha(G) < s.$$

Рассмотрим случайный граф $G(n, \frac{1}{2})$. Рассмотрим также произвольное множество $S$:

$$S \subset \{1, 2, \dots, n\} : \ |S| = s.$$

Тогда рассмотрим событие:

$$A_S = G\Big(n, \frac{1}{2}\Big)\Big|_S \text{ — является кликой или независимым множеством,}$$

то есть рассмотрим индуцированный подграф случайного графа, который реализуется на множестве $S$.

Тогда вероятность:

$$P(A_S) = 2 \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^{C_s^2} = 2^{1-c_s^2}.$$

Вероятность объединения по всем $S \subset 1, 2, \dots, n$:

$$P(\cup A_S) \leqslant \sum_S P(A_S) = C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}.$$

Тогда вычислим:

$$C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} \leqslant \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \frac{\big(1+o(1)\big)^s}{\mathrm{e}^s \cdot 2^{\frac{s}{2}}} \cdot \frac{s^s \cdot 2^{\frac{s^2}{2}}}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \frac{\big(1+o(1)\big)^s \cdot s^s \cdot 2}{\mathrm{e}^s \sqrt{2\pi s}\Big(\frac{s}{\mathrm{e}}\Big)^s (1+\overline{\overline{o}}(1))}.$$

Упростив получившееся выражение, найдем ровно то, что заявлено условием теоремы. ■

**Теорема 46**

$$R(s, s) \geqslant (1+o(1))\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}.$$

**Док-во:** Рассмотрим случайный граф $G\Big(n, \frac{1}{2}\Big)$. Введем случайную величину:

$$X = X(G),$$

которая есть число «вредоносных» событий, то есть число таких:

$$S \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

что:

$$G\Big(n, \frac{1}{2}\Big)\Big|_S \text{ — либо клика, либо независимое множество.}$$

Математическое ожидание:

$$MX = C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2},$$

следовательно:

$$\exists G : \ X(G) \leqslant C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}.$$

Рассмотрим этот граф $G$. В нем $n$ вершин и не больше, чем $C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$ «вредоносных» образований.

Уничтожим по одной вершине (включая смежные с ней ребра) из каждого «вредоносное» образования. Едва из «вредоносного» образования удаляется любая вершина — оно перестает быть «вредоносным».

Останется граф $H$, у которого не меньше, чем $n \cdot C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}$ вершин. В нем нет «вредоносных» образований:

$$\omega(H) < s, \quad \alpha(H) < s.$$

Следовательно:

$$R(s,s) \geqslant n - C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2}.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} n - C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} &\geqslant (1+o(1))\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}} - \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \\ &= (1+o(1))\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}} - \frac{\left(1+o(1)\right)^s}{\mathrm{e}^s} \cdot \frac{s^s \cdot 2^{\frac{s^2}{2}}}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \\ &= (1+o(1))\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}} - \frac{\left(1+o(1)\right)^s}{(1+o(1))} \cdot \frac{2 \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{2\pi s}} \sim \frac{s \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{\mathrm{e}}, \end{aligned}$$

где последнее сравнение возможно осуществить, так как вычитаемое бесконечно мало по сравнению с уменьшаемым.

Теорема доказана. ■

На следующей лекции будет проведено еще одно улучшение сравнения для диагонального числа Рамсея:

**Теорема 47**

$$R(s,s) \geqslant (1+o(1))\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}.$$