ЛЕКЦИЯ 12

ЛОКАЛЬНАЯ ЛЕММА ЛОВАСА

1. Доказательство нижней оценки числа Рамсея

Для доказательства нижней оценки числа Рамсея (теорема 47) понадобится формулировка локальной леммы Ловаса в симметричной форме, сама же лемма будет доказана на следующей лекции.

Лемма 5 (Локальная лемма Ловаса, симметричный случай)

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события, причем:

$$\forall i \quad P(A_i) \leqslant p.$$

Пусть также:

$$\forall i \quad A_i \text{ — не зависит от совокупности всех остальных событий,}$$
$$\text{кроме не более, чем } d \text{ штук.} \quad *$$

Также:

$$\mathrm{e} \cdot p(d+1) \leqslant 1,$$

где d — количество локальных зависимостей.

Тогда:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) > 0.$$

Тогда «вредоносные» события $i_1, \ldots, i_k$:

$$\forall i \quad \exists k \leqslant d, \ \exists i_1, \ldots, i_k : \ \forall j \ i_j \neq i.$$

Так как A_i не зависит от совокупности событий:

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \ \{A_i, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\},$$

$$B_1, \ldots, B_n : \ \forall J \subseteq \{1, \ldots, n\} \quad P\left(A \middle| \bigcap_{j \in J} B_j\right) = P(A).$$

Перейдем к доказательству теоремы 47, пользуясь сформулированной леммой 5:

Док-во: Рассмотрим случайно раскрашенный граф:

$$G\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Обозначим нижнюю оценку:

$$\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}} \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}} \cdot (1 + o(1)) = n.$$

Рассмотрим «вредоносные» события A_S:

$$A_S: \ G\left(n, \frac{1}{2}\right)\Big|_S \text{ — либо клика, либо независимое множество.}$$

Число таких событий — C_n^s. Вероятность каждого из них:

$$P(A_S) = 2^{1 - C_s^2}.$$

Событие A_S точно не зависит от совокупности всех событий $A_{S'}$, где:

$$\left|S' \cap S\right| \leqslant 1.$$

Заметим, что (см. рис. 12.1):

$$d \leqslant C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2},$$

так как были зафиксированы две произвольные вершины из S, общие с S', а затем остальные $s-2$ вершины были выбраны как угодно.

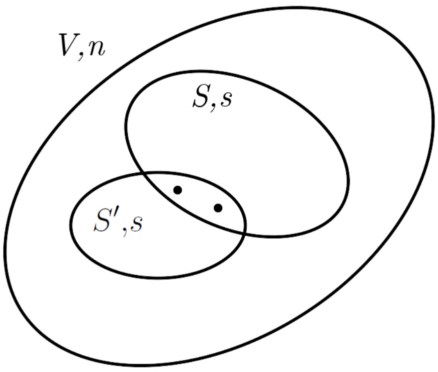

Рис. 12.1

Необходимо отметить, что полученная верхняя оценка — довольно неточная, потому что многие ситуации были посчитаны несколько раз.

В силу локальной леммы Ловаса в симметричной форме (лемма 5), если окажется, что:

$$\mathrm{e} \cdot 2^{1 - C_s^2} \cdot \left(C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2} + 1\right) \leqslant 1,$$

тогда:

$$R(s, s) > n.$$

Итак, было:

$$C_n^2 \cdot 2^{1-C_s^2} < 1,$$

а разница — между:

$$C_n^s \quad \text{и} \quad C_n^2 \cdot C_{n-2}^{s-2}.$$

Это дает улучшение ровно в нужное количество раз, поскольку:

$$\frac{C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s} \approx \frac{1}{n^2},$$

тогда:

$$\frac{C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2}}{C_n^s} \approx \frac{s^2}{n^2}.$$

Необходимо заметить, что s как функция от n ведет себя как логарифм, поэтому улучшение получается примерно в n^2 раз.

Таким образом, получим улучшение не в $\sqrt{2}$, а в 2 раза по сравнению с предыдущей оценкой.

Проверим аналитически:

$$\mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} \cdot \left(s^2 \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} + 1 \right) < \mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{s^4 \cdot n^{s-2}}{s!} + 1 \right) =$$

$$= \mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} \cdot \left(\frac{s^4}{s!} \cdot \frac{2^{\frac{s-2}{2}}}{\mathrm{e}^{s-2}} \cdot s^{s-2} \cdot 2^{\frac{s^2}{2}-s} \cdot \left(1+o(1)\right)^{s-2} \right) + \mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} =$$

$$= \mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} + \frac{\mathrm{e}^3 \cdot s^{s-2} \cdot \left(1+o(1)\right)^{s-2}}{\mathrm{e}^s \cdot \sqrt{2\pi s} \cdot \left(\frac{s}{\mathrm{e}}\right)^s} (1+o(1)) =$$

$$= \mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} + \frac{\mathrm{e}^3 \cdot s^2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{\left(1+o(1)\right)^{s-2}}{(1+o(1))}.$$

Заметим, что:

$$\mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = o(1).$$

Тогда:

$$\exists \phi,\ \phi(s):\ \phi(s) \to 0, \quad s \to \infty,$$
$$\left(1-\phi(s)\right)^s \cdot s^{\frac{3}{2}} \to 0.$$

Для примера возьмем с запасом:

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Тогда:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \mathrm{e}^{-\sqrt{s}\left(1+o(1)\right)}.$$

Таким образом, на примере показано, что существует функция, которая стремится к нулю, при которой:

$$\mathrm{e} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} + \frac{\mathrm{e}^3 \cdot s^2}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{\left(1+o(1)\right)^{s-2}}{(1+o(1))} \to 1, \quad \forall s.$$

Теорема доказана. ■

2. Несимметричный случай локальной леммы Ловаса

Для того, чтобы доказать симметричный случай локальной леммы Ловаса (лемма 5), сформулируем сначала несимметричный случай данной леммы и выведем из него симметричный. На следующей лекции также будет доказан несимметричный случай леммы.

В формулировке несимметричного случая локальной леммы Ловаса будет использоваться следующее понятие:

Определение 28: *Пусть имеется несколько событий $A_1, \dots, A_n$. Пусть также дан некоторый ориентированный граф $G = (V, E)$, вершинами которого являются события $A_1, \dots, A_n$. Этот граф является* ***орграфом зависимостей*** *тогда и только тогда, когда:*

$$\forall i = 1, \dots, n \quad A_i \text{ не зависит от совокупности событий } A_J : \ (A_i, A_j) \notin E.$$

Поясним определение рисунком 12.2. Например, рассмотрим вершину A_1. Посмотрим, куда из этого события не идут направленные ребра. На приведенном рисунке из A_1 никуда не выходят направленные ребра.

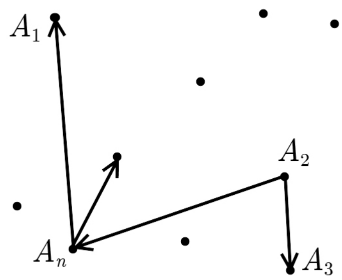

Рис. 12.2

Далее необходимо проверить, верно ли, что для конкретного множества событий A_1 не зависит от совокупности всех остальных. Если это верно — переходим к рассмотрению события A_2.

В рассматриваемом случае из A_2 выходят два направленных ребра — в A_3 и в A_n. Значит, нужно удостовериться, что A_2 не зависит от совокупности событий A_3 и A_n, и так далее.

Замечание Орграф зависимостей для конкретного множества не является единственным. $*$

Замечание Заведомо является орграфом зависимостей *полный граф*, так как каждое событие не зависит от пустого множества событий. Необходимо обратить внимание на то, что для пустого графа аналогичное утверждение не является верным. $*$

Если какие-то два события — зависимы, то:

$$(A_i, A_j) \in E, \quad (A_j, A_i) \in E.$$

Проиллюстрируем это на следующих примерах:

Пример 12 Рассмотрим события, которые независимы в совокупности. Для них орграфом зависимостей будет любой ориентированный граф. $*$

Пример 13 Рассмотрим три события A_1, A_2, A_3, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности. Соединим их минимально возможным количеством ребер для получения орграфа зависимости.

Необходимо отправить хотя бы одно ребро из каждой вершины, пусть без ограничения общности для вершины A_1 это будет ребро A_1A_2. Тогда аналогично из A_2 отправим ребро A_2A_3 (см. рис. **??**) или ребро A_2A_1 (см. рис. **??**).

Для вершины A_3 нарисуем ребра, как показано на рисунках **??** и **??**. Получилось два неизоморфных орграфа зависимостей для событий A_1, A_2, A_3.

Если к тому же важен порядок вершин, то получим еще больше аналогичных орграфов зависимостей, которые уже будут одинаковыми с точки зрения изоморфизма.

Таким образом, нельзя провести меньше ребре, чем три, для получения орграфа зависимостей данного множества. $*$

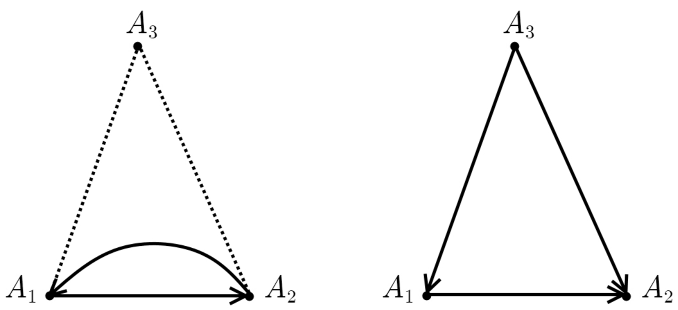

Рис. 12.3

Лемма 6 (Локальная лемма Ловаса, несимметричный случай)

Пусть имеются события $A_1, \ldots, A_n$. Пусть $G = (V, E)$ — такой орграф зависимостей, что найдутся числа:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in [0, 1),$$

при которых выполнено неравенство:

$$\forall i \quad P(A_i) \leqslant x_i \prod_{j\colon\ (A_i, A_j)\in E} (1 - x_j).$$

Тогда ни одно из событий не выполняется с положительной вероятностью:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) \geqslant \prod_{j=1}^{n} (1 - x_j) > 0.$$

Как оговаривалось выше, теперь выведем из этого утверждения симметричный случай леммы:

Теорема 48 Несимметричный случай локальной леммы Ловаса влечет симметричный случай этой леммы. $*$

Док-во: Итак, известно следующее:

$$P(A_i) \leqslant p, \quad \text{число } d, \quad \mathrm{e} \cdot p(d+1) \leqslant 1.$$

Прежде всего необходимо найти подходящий орграф зависимостей. Рассмотрим такой орграф, как показано на рис. 12.4.

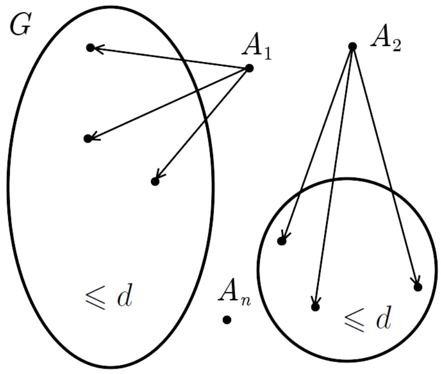

Рис. 12.4

Наиболее естественно выпустить ребра из A_1 таким образом: возьмем те «вредоносные» события, которых по условию не больше, чем d, и в каждое из них направим ребро. Тогда относительно A_1 условие на орграф не будет нарушено.

Повторим те же действия для события A_2. В события, вредящие A_2, проведем направленные ребра, больше же никуда проводить их не будем.

Проделаем так с каждой вершиной из множества. Получим интересующий орграф зависимостей.

Рассмотрим два случая:

$$d = 0 \quad \text{и} \quad d \geqslant 1.$$

Случай 1: $d = 0$.

В таком случае граф G — пустой, а значит, все события независимы в совокупности. Тогда их дополнения также независимы в совокупности:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) \geqslant (1-p)^n > 0, \quad p < 1.$$

Получилось, что в тривиальном случае для доказательства симметричного случая леммы не нужно использовать несимметричный.

Случай 2: $d \geqslant 1$.

Рассмотрим получившийся граф G. Нужно выбрать какие-то числа $x_1, \ldots, x_n$ для выполнения желаемой оценки. Выберем их:

$$x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{d+1}.$$

Теперь понятно, для чего нужно было отдельно рассматривать случай $d = 0$ — если:

$$x_1 = \cdots = x_n = 1,$$

то несимметричный случай не будет выполняться по условию.

Осталось убедиться в справедливости неравенства:

$$P(A_i) \leqslant x_i \prod_{j:\ (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j).$$

Подставим:

$$x_i \prod_{j:\ (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j) \geqslant \frac{1}{d+1} \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \geqslant \frac{1}{\mathrm{e} \cdot (d+1)}.$$

Известно, что:

$$P(A_i) \leqslant p.$$

Тогда нужно проверить, что:

$$\frac{1}{\mathrm{e} \cdot (d+1)} \geqslant p.$$

Это верно, так как из условия симметричного случая локальной леммы Ловаса (лемма 5):

$$\mathrm{e} \cdot p(d+1) \leqslant 1.$$

Теорема доказана. ■