ЛЕКЦИЯ 13

ЛОКАЛЬНАЯ ЛЕММА ЛОВАСА В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЕ

1. Доказательство локальной леммы Ловаса в несимметричном случае

Перейдем к доказательству леммы 6 — несимметричного случая локальной леммы Ловаса:

Док-во: Воспользовавшись понятием условной вероятности из теории вероятностей, запишем:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2} \middle| \overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_3} \middle| \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \cdot \ \dots \ \cdot P\left(\overline{A_n} \middle| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}\right) =$$

$$= (1 - P(A_1)) \cdot \left(1 - P\left(A_3 \middle| \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right)\right) \cdot \ \dots \ \cdot P\left(1 - P\left(A_n \middle| \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}\right)\right).$$

Если будет показано, что:

$$P\left(A_i \middle| \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i-1}}\right) \leqslant x_i,$$

то лемма будет доказана.

Докажем более сильный факт:

$$\forall i \ \forall J \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \ \{i\} \quad P\left(A_i \middle| \bigcap_{j \in J} \overline{A_j}\right) \leqslant x_i.$$

Зафиксируем i и докажем этот факт индукцией по мощности множества J. База индукции:

$$|J| = 0.$$

Тогда:

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}\right) = P(A_i) \leqslant x_i.$$

Предположим, что для всех J:

$$|J| \leqslant k.$$

Тогда предположение индукции будет выглядеть так:

$$\forall i\ \forall J:\ |J| \leqslant k \quad P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}\right) \leqslant x_i.$$

Необходимо доказать для $k+1$. Рассмотрим произвольное J:

$$|J| = k+1.$$

Разобьем J на две части в соответствии с наличием или отсутствием ребер в графе:

$$J = J_1 \sqcup J_2, \quad \text{где } J_1 = \{j:\ (A_i, A_j) \in E\}.$$

Возможны два случая:

$$J_1 = \emptyset \quad \text{и} \quad J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}.$$

Случай 1: $J_1 = \emptyset$.
Тогда:

$$J = J_2,$$

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}\right) = P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right) = P(A_i) \leqslant x_i.$$

Таким образом, в тривиальном случае не потребовалось предположение индукции.
Случай 2: $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$.
Тогда:

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}\right) = P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \cap \left(\bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)\right) = \frac{P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j}\right) \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)}{P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)}.$$

Заметим, что вероятность пересечения событий не превосходит вероятности любого из них. Поэтому запишем:

$$\frac{P\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j}\right) \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)}{P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)} \leqslant \frac{P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)}{P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)} \leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ (i,j)\in E} (1-x_j)}{P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)}.$$

Нужно доказать, что:

$$P\left(A_i \middle| \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}\right) \leqslant \frac{x_i \cdot \prod_{j:\ (i,j)\in E}(1-x_j)}{P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)} \leqslant x_i.$$

Рассмотрим знаменатель:

$$P\left(\bigcap_{j\in J_1} \overline{A_j} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right) = P\left(\overline{A_{j_1}} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)\cdot$$

$$\cdot P\left(\overline{A_{j_2}} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j} \cap \overline{A_{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A_{j_r}} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j} \cap \ldots \cap \overline{A_{j_{r-1}}}\right) =$$

$$= \left(1 - P\left(A_{j_1} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \left(A_{j_r} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j} \cap \ldots \cap \overline{A_{j_{r-1}}}\right)\right).$$

Теперь можно применить предположение индукции. Так как i можно выбирать произвольно, напишем:

$$\left(1 - P\left(A_{j_1} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \left(A_{j_r} \middle| \bigcap_{j\in J_2} \overline{A_j} \cap \ldots \cap \overline{A_{j_{r-1}}}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1-x_j) \cdot \ldots \cdot (1-x_{j_r}).$$

Известно, что:

$$(i, j_1) \in E \quad \ldots \quad (i, j_r) \in E,$$

так как $j_1, \ldots, j_r$ — элементы множества J. Поэтому:

$$(1-x_j) \cdot \ldots \cdot (1-x_{j_r}) \geqslant \prod_{j:\ (i,j)\in E} (1-x_j),$$

что и требовалось доказать. ■

2. Использование несимметричного случая локальной леммы

Продемонстрируем ситуацию, в которой понадобится несимметричный случай локальной леммы Ловаса:

Теорема 49

$$R(3,t) \geqslant c \cdot \frac{t^2}{\ln^2 t}.$$

Док-во: Неравенство:

$$R(3, t) > n$$

равносильно тому, что существует раскраска ребер полного графа на n вершинах K_n, при которой нет ни красного K_3, ни синего K_t.

Для доказательства теоремы будет применен вероятностный метод, использовавшийся и ранее в данном курсе.

Возьмем число p:

$$p \in [0, 1],$$

которое в дальнейшем будет подобрано более точно оптимальным образом, и покрасим ребра графа K_n в красный цвет с вероятностью p, а в синий — с вероятностью $1 - p$.

Рассмотрим два вида событий:

$$A_1, \ldots, A_{C_n^3} \quad \text{и} \quad B_1, \ldots, B_{C_n^t}.$$

Событие A_i будет заключаться в том, что i-й треугольник — красный, а событие B_i будет заключаться в том, что i-й K_t — синий.

Цель: показать, что при:

$$n = \frac{t^2}{\ln^2 t}$$

вероятность пересечения:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{C_n^3} \overline{A_i} \bigcap_{i=1}^{C_n^t} \overline{B_i}\right) > 0.$$

Видно, что нужно применить локальную лемму Ловаса в несимметричной форме. Вероятности:

$$p(A_i) = p^3,$$

$$P(B_i) = (1-p)^{C_t^2}.$$

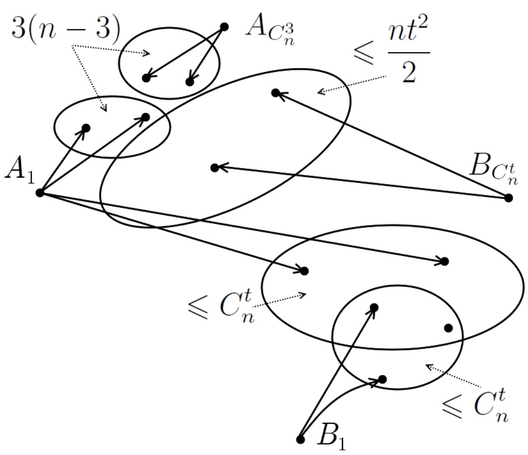

Рис. 13.1

Необходимо построить соответствующий орграф зависимостей (см. рис. 13.1). Из A_1 нужно проводить направленные ребра в те и только те события, от которых событие A_1 зависит.

Очевидно, что A_1 зависит только от событий своего же типа (A), чьи треугольники имеют общее ребро с треугольником, отвечающим A_1. Таких событий для любой вершины — $3(n-3)$.

Получился регулярный граф, у которого исходящая степень каждой вершины равна:

$$3(n-3) \leqslant 3n.$$

Для B_1 проделаем то же самое. Событие B_1 будет соединено в орграфе зависимости направленным ребром только с теми событиями, которые отвечают кликам, имеющим общее ребро с кликой, отвечающей событию B_1.

Оценим количество получившихся клик с помощью рисунка 13.2. На рисунке показана зафиксированная клика на t вершинах. Общее количество вершин — n штук.

Других клик на t вершинах среди данных n, которые с выбранной кликой пересекаются не меньше, чем по двум вершинам, будет не больше, чем C_n^t, что является совершенно тривиальной оценкой. Однако, в данном случае и такая оценка будет достаточной.

Так же оценим количество событий, которым отвечают ведущие из группы событий A в группу событий B ребра. Наоборот, то есть для ребер, ведущих из B в A, получится другая оценка. Их будет не больше, чем:

$$C_t^2 \cdot (n-t) < \frac{nt^2}{2}.$$

Чтобы применить локальную лемму Ловаса, надо найти такие числа:

$$x \in [0,1), \quad y \in [0,1),$$

что:

$$P(A_i) \leqslant \prod_{j:\ (A_i,A_j)\in E} (1-x) \cdot \prod_{j:\ (A_i,B_j)\in E} (1-y), \tag{13.1}$$

$$P(B_i) \leqslant \prod_{j:\ (B_i,B_j)\in E} (1-y) \cdot \prod_{j:\ (B_i,A_j)\in E} (1-x). \tag{13.2}$$

Тогда:

$$p^3 \leqslant x \cdot (1-x)^{3n} \cdot (1-y)^{C_n^t}, \tag{13.3}$$

$$(1-p)^{C_t^2} \leqslant y \cdot (1-x)^{\frac{nt^2}{2}} \cdot (1-y)^{C_n^t}. \tag{13.4}$$

Проверив неравенства 13.3 и 13.4, можно будет убедиться в верности неравенств 13.1 и 13.2.

Нужно доказать, что существует такая константа c и такие функции:

$$p(n), \quad x(n), \quad y(n),$$

которые принимают значения из полуинтервала $[0,1)$ и с которыми для любого t и для n:

$$n = \frac{ct^2}{\ln^2 t}$$

выполняются неравенства 13.3 и 13.4.

Опускаются некоторые выкладки для точного вычисления константы c. Тогда будем считать, что теорема доказана по модулю функций $p(n)$, $x(n)$ и $y(n)$. ■

Приведем доказанный факт:

Утверждение 7

$$R(3,t) \leqslant (1+o(1))\frac{t^2}{\ln t}.$$

Как видно из данного утверждения, между тем фактом, который доказывается в теореме 49, и данным неравенством возникает зазор. Так получается из-за того, что для данной ситуации локальную лемму Ловаса можно уточнить, что и было сделано в 1995 году:

Утверждение 8 (1995, Kim Jeong Han)

$$R(3,t) \geqslant \left(\frac{1}{162}+o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}.$$

Таким образом, теперь нижняя оценка числа Рамсея совпадает по порядку с верхней оценкой.

В 2013 году этот результат был улучшен:

Утверждение 9

$$R(3,t) \geqslant \left(\frac{1}{4}+o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t}.$$

Таким образом, на настоящий момент все еще является неизвестной асимптотика числа Рамсея.

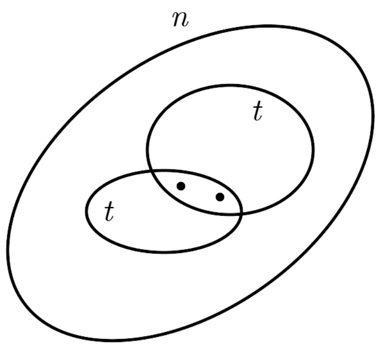

Рис. 13.2