# ЛЕКЦИЯ 15

# ЧИСЛО РАМСЕЯ ДЛЯ ГИПЕРГРАФА. ДВУДОЛЬНЫЕ ЧИСЛА РАМСЕЯ

## 1. Доказательство теоремы Франкла-Уилсона

Продолжим доказательство теоремы 50.

**Док-во:** На прошлой лекции были доказаны леммы 7 и 8, и рассуждение были сведены к тому, что осталось необходимым выполнить два пункта для завершения доказательства:

1. Доказать:
$$n = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}.$$
2. Объяснить, почему:
$$\forall s\ \exists p:\ s - 1 = \sum_{i=0}^{p} C_m^i.$$

Было получено:

1. $\alpha(G) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p-1} C_m^i$;
2. $\omega(G) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p} C_m^i$;
3. $n = C_{p^3}^{p^2}$ — число вершин в графе.

Для того, чтобы выразить $n$ через $s$, рассмотрим следующее утверждение:

**Утверждение 11**

$$n = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^s}{\ln\ln s}}.$$

**Док-во:** Запишем:

$$n = C_{p^3}^{p^2} = \frac{p^3 \cdot (p^3-1) \cdot \ldots \cdot (p^3 - p^2 + 1)}{(p^2)!} = \frac{(p^3)^{p^2\left(1+o(1)\right)}}{(p^2)!}.$$

Последний переход рекомендуется проделать самостоятельно, пользуясь знаниями об асимптотиках. Тогда далее:

$$\frac{(p^3)^{p^2\left(1+o(1)\right)}}{(p^2)!} = \frac{(p^3)^{p^2\left(1+o(1)\right)}}{(p^2)^{p^2\left(1+o(1)\right)}} = p^{p^2\left(1+o(1)\right)}.$$

Выполним оценку:

$$s = \sum_{i=0}^{p} C_{p^3}^{i} \leqslant (p+1) C_{p^3}^{p}.$$

С другой стороны:

$$s \geqslant C_{p^3}^{p}.$$

Распишем так же:

$$C_{p^3}^{p} = \frac{(p^3)^{p\left(1+o(1)\right)}}{p^{p\left(1+o(1)\right)}} = p^{2p\left(1+o(1)\right)}.$$

Следовательно:

$$s = p^{2p\left(1+o(1)\right)}.$$

Прологарифмируем:

$$\ln s = 2p \ln p (1 + o(1));$$
$$\ln^2 s = 4p^2 \ln^2 p (1 + o(1));$$
$$\ln\ln s = \ln p (1 + o(1)).$$

Тогда в итоге получим:

$$\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s} = (1 + o(1)) 4p^2 \ln p.$$

Рассмотрим:

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}} = \mathrm{e}^{\left(1+o(1)\right)p^2 \ln p} = p^{2p\left(1+o(1)\right)}.$$

Тогда заметим:

$$\exists o(1) : \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)^{\left(1+o(1)\right)\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}} = n.$$

Заметим, что поправка $(1 + o(1))$ была необходима в данных рассуждениях.
Утверждение доказано. ∎

Многие задаются вопросом, существует ли оценка, лучшая, чем полученная. Этими исследованиями занимается наука, которая носит название *экспандеры*(графы-расширители).

По сути, теорему 50 можно считать доказанной. Для полного формального доказательства теоремы не хватает обоснования второго пункта из вышеперечисленных.

Пусть $s \in N$ — произвольное натуральное число. Возьмем максимальное простое число $p$:

$$s' = \sum_{i=0}^{p} C_m^i \leqslant s.$$

Известно, что:

$$R(s', s') \geqslant \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}};$$

$$R(s, s) \geqslant R(s', s'),$$

так как число $p$ не убывает:

$$s \geqslant s'.$$

Если бы удалось доказать, что $s'$ отличается от $s$ не слишком сильно, то есть доказать, что:

$$\frac{\ln^2 s'}{\ln \ln s'} \sim \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s},$$

то теорема 50 была бы полностью доказана.

Аккуратное доказательство не будет приведено в данном курсе, но будет сказано, что эта выкладка вытекает из плотности распределения простых в натуральном ряде.

Известно, что на отрезке:

$$\left[x, x + o\left(x^{0,525}\right)\right]$$

есть простое число.

За счет этого можно получить доказательство желаемого факта. Более того, для этих целей будет достаточно использовать не $o\left(x^{0,525}\right)$, а $\overline{\overline{o}}(x)$.

На этом завершим доказательство теоремы 50. ■

Подобными задачами занимается наука *theoretical computer science.*

# 2. Еще одно применение локальной леммы Ловаса

Вспомним известное утверждение:

**Теорема 51 (Брукс)** Если $\Delta$ — максимальная степень вершины графа $G$, то хроматическое число такого графа:

$$\chi(G) \leqslant \Delta + 1.$$

Этот тривиальный факт рекомендуется доказать по индукции самостоятельно.

Необходимо понять, как полученный результат теоремы 51 распространяется на гиперграфы.

Подобную теорему для гиперграфа умеют доказывать только с помощью локальной леммы Ловаса, то есть без мощного вероятностного инструмента данный результат получить невозможно. Это является еще одним необычным применением локальной леммы.

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф, являющийся $n$-однородным (то есть, каждое его ребро имеет одну и ту же мощность $n$). Пусть $\Delta$ — максимальная степень вершины такого гиперграфа (количество ребер, которые эту вершину содержат).

Нужно как-то оценить:

$$\chi(H) \leqslant f(\Delta).$$

Попробуем применить локальную лемму Ловаса.

Рассмотрим натуральное число $r \in N$ и случайную раскраску $\chi$ множества $V$ в $r$ цветов. Если показать, что с положительной вероятностью раскраска является правильной, то будет доказано, что:

$$\chi(H) \leqslant r.$$

Пусть для ребра $f \in E$ $A_f$ — это событие, состоящее в том, что ребро $f$ в данной случайной раскраске — одноцветно. Тогда:

$$\bigcap_{f \in E} \overline{A_f}$$

является правильной раскраской, то есть ни одно из ребер не является одноцветным.

Значит, если доказать следующее:

$$P\left(\bigcap_{f \in E} \overline{A_f}\right) > 0, \tag{15.1}$$

то будет доказано, что:

$$\chi(H) \leqslant r.$$

Неравенство 15.1 будет следовать из локальной леммы Ловаса:

$$\mathrm{e}\, p(d+1) \leqslant 1,$$

где $p$ — вероятность события $A_f$:

$$p = P(A_f) = \frac{[}{h}]r^n = r^{1-n},$$

а $d$ — это количество событий $A_{f'}$, от которых зависит событие $A_f$. Тогда:

$$A_{f'}: \ f \cap f' \neq \emptyset.$$

На рисунке 15.1 показано, что на одной выбранной вершине «сидит» ребро $f$ и еще не больше, чем $\Delta - 1$ ребер. Всего вершин — $n$, так может быть устроена каждая из них.

Тогда получается, что:

$$d \leqslant (\Delta - 1)n.$$

Значит:

$$\mathrm{e} \cdot r^{1-n}\Big((\Delta - 1)n + 1\Big) \leqslant 1,$$

что следует из следующего утверждения:

$$r \geqslant \left(\mathrm{e}\Big((\Delta - 1)n + 1\Big)\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Данные рассуждения приводят к теореме:

**Теорема 52**

$$\chi(H) \leqslant \left\lceil \mathrm{e}\Big((\Delta-1)n+1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \right\rceil.$$

**Следствия:**

$$\chi(H) \leqslant \left\lceil \mathrm{e}(2\Delta-1) \right\rceil.$$

Заметим, что следствие 4 всего лишь в $2\,\mathrm{e}$ раз хуже, чем теорема Брукса (теорема 51).

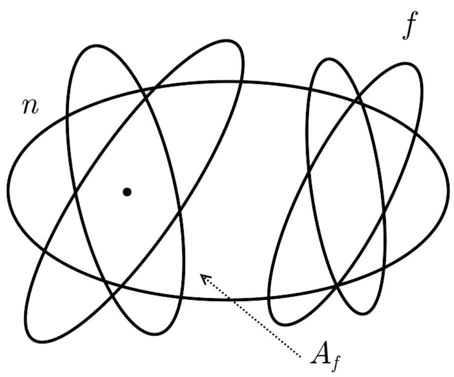


Рис. 15.1

# 3. Число Рамсея для гиперграфа

***Определение 29:*** ***Число Рамсея для гиперграфа*** *определяется следующим образом:*

$$R_k(l_1, \dots, l_r) = \min\{n \in N : \text{ при любой раскраске ребер полного } k\text{-однородного гиперграфа на } n \text{ вершинах в цвета } 1, \dots, r \exists i, \exists l_i\text{-элементное подмножество вершин, в котором все } k\text{-ребра — } i\text{-го цвета}\}.$$ ♣

**Замечание** При:

$$k = 2, \quad r = 2$$

происходит возвращение к обычному графовому числу Рамсея. *

**Теорема 53**

$$R_k(l_1, \dots, l_r) \leqslant R_{k-1}\Big(R_k(l_1 - 1, l_2, \dots, l_r), R_k(l_1, l_2 - 1, \dots, l_r), R_k(l_1, \dots, l_r - 1)\Big) + 1.$$

**Док-во:** Сформулируем идею доказательства.

Выделим из общего числа вершин вершину $x$ и рассмотрим все ребра, которые «сидят» на $x$ (см. рис. 15.2). Далее выкидываем $x$ и рассмотрим все оставшиеся $(k-1)$-элементные множества.

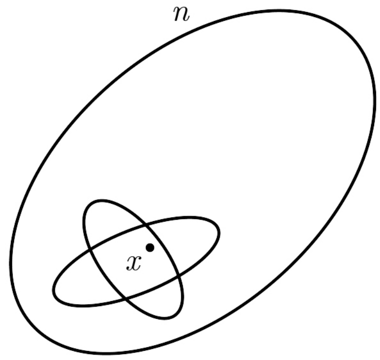


Рис. 15.2

Если задана какая-то раскраска $k$-элементного множества, то $(k-1)$-элементное множество необходимо раскрасить в те же цвета.

Видно, что найдется либо подмножество мощности:

$$R_k(l_1 - 1, l_2, \dots, l_r),$$

в котором все $(k-1)$-элементные множества — первого цвета, либо подмножество мощности:

$$R_k(l_1, l_2 - 1, \dots, l_r),$$

в котором все $(k-1)$-элементные множества — второго цвета, и так далее.

Без ограничения общности предположим, что нашлось такое множество мощности:

$$R_k(l_1, l_2 - 1, \ldots, l_r).$$

Тогда, продолжив стандартные «рамсеевские» рассуждение в свою очередь для такого множества, в итоге завершим доказательство теоремы. ■

Известно, что для диагонального графового числа Рамсея верно неравенство:

$$R_2(s,s) \leqslant 4^s.$$

Для гиперграфового числа Рамсея сформулируем следующее утверждение:

**Утверждение 12**

$$R_3(s,t) \leqslant \left.4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}\right\} s+t \text{ раз}.$$

**Замечание** Похожим образом ведут себя в дискретной математике некоторые классические функции. *

**Док-во:** Понятно, что:

$$R_3(1,t) = 1 \leqslant \left.4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}\right\} 1+t \text{ раз}.$$

Это — база индукции.

Также заметим, что:

$$R_3(s,t) = R_3(t,s),$$

так как число Рамсея является симметричным.

Воспользуемся теоремой 53:

$$R_3(s,t) \leqslant R_2\Big(R_3(s-1,t), R_3(s,t-1)\Big).$$

По предположению индукции:

$$R_3(s-1,t) \leqslant \left.4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}\right\} s+t-1 \text{ раз},$$

$$R_3(s,t-1) \leqslant \left.4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}\right\} s+t-1 \text{ раз},$$

то есть:

$$R_2\Big(R_3(s-1,t), R_3(s,t-1)\Big) \leqslant R_2(x,x) \leqslant 4^x,$$

где:

$$x = \left.4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}\right\} s+t \text{ раз}.$$

Утверждение доказано. ■

**Следствия:** Для диагонального гиперграфового числа Рамсея:

$$R_3(s,s) \leqslant 4^{4^{4^{\dots^{4}}}} \Big\} 2s \text{ раз.}$$

Вероятностным методом можно получить нижнюю оценку:

**Теорема 54** Пусть:

$$2C_n^s \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{C_s^3} < 1.$$

Тогда:

$$R_3(s,s) \geqslant n.$$

Доказательство теоремы вытекает из вышесказанного и остается в качестве упражнения.

**Следствия:**

$$R_3(s,s) \geqslant 2^{\frac{s^2}{6}} \cdot (1+o(1)).$$

Видно, что зазор между верхней и нижней оценкой — велик. С помощью современных методов было получено, что эти оценки отличаются на один «этаж» в «башне» из четверок, то есть оценка была значительно улучшена.

# 4. Двудольные числа Рамсея

Переходим к последней теме теории Рамсея.

***Определение 30: Двудольное число Рамсея*** $b(s,t)$*:*

$$b(s,t) = \min\Big\{n \in N: \text{ при любой раскраске ребер полного двудольного графа } K_{n,n} \text{ либо } \exists K_{s,s} \subseteq K_{n,n}, \text{ у которого все ребра — красные, либо } \exists K_{t,t} \subseteq K_{n,n}, \text{ у которого все ребра — синие}\Big\}. \quad \clubsuit$$

У такого графа число ребер — $n^2$.

Вспомним лучшую нижнюю оценку диагонального числа Рамсея:

$$R(s,s) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}} \cdot (1+o(1)) \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}.$$

Сравним ее со следующей теоремой (получим отличие в $\sqrt{2}$ раз):

**Теорема 55**

$$b(s,t) \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot (1+o(1)) \cdot s \cdot 2^{\frac{s}{2}}.$$

**Док-во:** Сформулируем идею доказательства: чтобы доказать эту теорему, нужно оценить какую-то вероятность единицей, что уже было проделано на этой лекции.

На рисунке 15.3 показан полный двудольный граф с долями размера $n$. Случайным образом красим его ребра. На приведенном рисунке проведены все возможные ребра.

Выберем сверху и снизу какие-то $s$ вершин. Тогда:

$$\left(C_n^s\right)^2 \cdot 2^{1-s^2} < 1.$$

Вспомним, что для диагонального числа Рамсея неравенство выглядело так:

$$\left(C_n^s\right)^2 \cdot 2^{1-C_s^2} < 1.$$

Рассуждая аналгочино, завершим доказательство данной теоремы. ■

Заметим, что разница — между $C_s^2$ и $s^2$. Так как:

$$C_s^2 = \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2},$$

за счет этого получается итоговая разница в $\sqrt{2}$ раз.

Оказывается, что несмотря на ничтожные отличия в нижних оценках между двудольным и обычным числом Рамсея, верхняя оценка ведет себя совершенно по-другому:

**Теорема 56 (2006, Конлон)**

$$b(s,s) \leqslant 2^{s+1} \cdot s\big(1 + o(1)\big).$$

Таким образом, разница в верхних оценках получается колоссальной. Это будет подробно рассмотрено на следующей лекции.

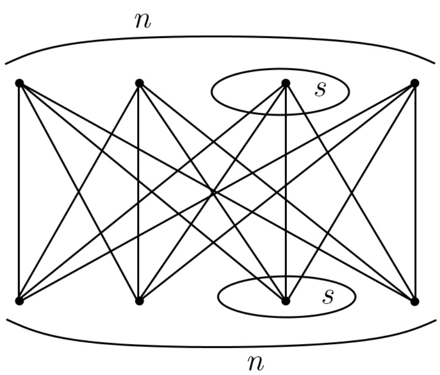


Рис. 15.3