ЛЕКЦИЯ 17

СИСТЕМА ОБЩИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

1. Определение системы общих представителей

Перейдем к новой теме, имеющей в том числе и многочисленные прикладные применения.

Определение 31: *Пусть дано множество:*

$$R_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Выберем его подмножество:

$$\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} : \ M_i \subseteq R_n, \quad \forall i.$$

Будем считать, что так же в терминах гиперграфов:

$$|M_i| = k,$$

будем говорить тогда «$\mathcal{M}$ с параметрами n, k, s».

Системой общих представителей *(сокращенно будем говорить СОП) для совокупности $\mathcal{M}$ называется любое множество S, для которого верно следующее:*

$$S \subset R_n : \ M_i \cap S \neq \emptyset, \quad \forall i.$$

Замечание Термин «система общих представителей» в некотором смысле аналогичен понятию «вершинное покрытие».

Разница состоит в том, что понятие СОП определяется для гиперграфов, в то время как вершинное покрытие определяется для графов. *

Интерпретация понятия СОП такова: в аудитории готовятся к олимпиаде школьники. Из них нужно составить хорошую олимпиадную команду.

Нужно при этом, чтобы команда заняла хорошее место в командном зачете, так что из всех школьников выберем тех, которые являются лучшими по геометрии, лучшими по теории чисел, лучшими по комбинаторике и так далее. По каждому предмету выберем пятерых лучших учеников.

Далее из получившихся пятерок выбираем по представителю таким образом, чтобы этих представителей было наименьшее число, так как если их будет много, то придется много платить.

Заметим, что пусть это и довольно несерьезная интерпретация, но практически все прикладные применения СОП так или иначе получаются из похожих соображений — когда необходимо как можно экономнее собрать хорошую «команду» из чего-либо.

Введем следующую характеристику, как раз отвечающую за «экономность» такой команды:

Определение 32:

$$\tau(\mathcal{M}) = \min\{|S| :\ S \text{ является СОП для } \mathcal{M}\}.$$

2. Утверждения о системе общих представителей

Следующие утверждения помогут понять, насколько маленькой может быть характеристика τ:

Утверждение 15

$$\forall n, k, s\ \forall \mathcal{M} :\ \tau(\mathcal{M}) \leqslant \min\{n, s\}.$$

Это довольно тривиальное утверждение, вытекающее из определения системы общих представителей.

Можно привести небольшое уточнение утверждения 15, которое доказывается столь же просто:

Утверждение 16

$$\forall n, k, s\ \forall \mathcal{M} :\ \tau(\mathcal{M}) \leqslant n - k + 1.$$

Утверждение 17

$$\forall n, k, s\ \exists \mathcal{M} \text{ с этими параметрами: } \tau(\mathcal{M}) \leqslant \min\left\{ \left[\frac{n}{k}\right], s \right\}.$$

Док-во: Случай 1: $s \leqslant \left[\frac{n}{k}\right]$.

Тогда нужно доказать, что:

$$\exists \mathcal{M} :\ \tau(\mathcal{M}) \geqslant s.$$

На рисунке 17.1 показано множество из n элементов. Выложим в полчившуюся «лоханку» множества, которые нужно построить.

! ***Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.***

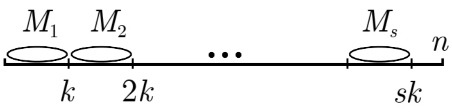

Рис. 17.1

Множество M_1 состоит из первых k элементов. Множество M_2 не пересекается с множеством M_1 и состоит из следующих k элементов, и так далее.

Поскольку $s \leqslant \left[\frac{n}{k}\right]$, множества можно разложить в «лоханке» так, чтобы они не пересекались.

Интерпретация: сосиски разложены по дну кастрюли так, что они не пересекаются друг с другом.

Видно, что конструкция для первого случая получена.

Случай 2: $s > \left[\frac{n}{k}\right]$.

Теперь нужно доказать, что:

$$\tau(\mathcal{M}) \geqslant \left[\frac{n}{k}\right].$$

Создадим точно такую же «лоханку», как в первом случае. В нее теперь положим не sk, а $\left[\frac{n}{k}\right]$ «сосисок». Очевидно, что они уместятся.

Но так как $s > \left[\frac{n}{k}\right]$, то нужно уместить еще немного «сосисок», помимо $\left[\frac{n}{k}\right]$ штук.

Тогда насыпаем новые «сосиски» сверху как угодно, чтобы только в сумме их было s штук. От этого величина τ не может измениться. Если же:

$$\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \quad \tau(\mathcal{M}) \geqslant \tau(\mathcal{M}'),$$

и тогда утверждение доказано. ■

Из утверждений 15, 16 и 17 видно, что между верхними и нижней оценкой характеристики τ есть некий зазор. Следующая теорема уже будет достаточно точна:

Теорема 58

$$\forall n, k, s\ \forall \mathcal{M}:\ \tau(\mathcal{M}) \leqslant \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

Док-во: Основной идеей доказательства служит банальный жадный алгоритм, который уже встречался неоднократно в данном курсе лекций.

Случай 1: $s \leqslant \frac{n}{k}$.

Тогда можно использовать утверждение 15:

$$\tau(\mathcal{M}) \leqslant s \leqslant \frac{n}{k} \leqslant \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\}.$$

Случай 2: $\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} \geqslant n$.

Снова используем утверждение 15:

$$\tau(\mathcal{M}) \leqslant n \leqslant \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} \leqslant \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\}.$$

! ***Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на*** pulsar@phystech. edu

Случай 3: $s > \frac{n}{k}$ и $\frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n} < n$.

Пусть дана совокупность $\mathcal{M}$ с параметрами n, s, k. Ищем систему общих представителей с помощью жадного алгоритма.

Возьмем такой элемент $\nu_1 \in R_n$, который принадлежит наибольшему количеству множеств:

$$M_i \in \mathcal{M}.$$

Интерпретация: прежде всего в олимпиадную команду возьмем того студента, который обладает самым большим запасом знаний из разных областей математики.

Если таких элементов оказалось несколько, без ограничения общности берем любой из них.

Обозначим:

$$\rho_1 = \Big|\{i: \ \nu_1 \in M_i\}\Big|.$$

Тогда ρ_1 — это количество множеств, которые содержат элемент ν_1.

При дальнейшем доказательстве понадобится следующая лемма, доказывающаяся по принципу Дирихле:

Лемма 9

$$\rho_1 \geqslant \frac{sk}{n}.$$

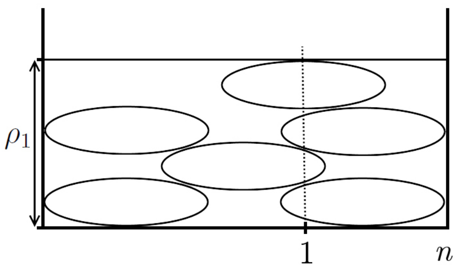

Рис. 17.2

Док-во: На рисунке 17.2 показана «кастрюля», в которой расположены «сосиски» мощностью s каждая.

Позиция 1 — это та позиция, в которой с помощью «шампура» можно достать больше всего «сосисок» — в данном случае, четыре штуки.

Суммарное количество элементов, попавших под планку ρ_1 — это sk. Тогда очевидно, что:

$$sk \leqslant \rho_1 n,$$

$$\rho_1 \geqslant \frac{sk}{n}.$$

Лемма доказана. ■

Теперь удалим из $\mathcal{M}$ все множества, содержащие ν_1. В итоге получим совокупность $\mathcal{M}_1$.

Пусть мощность новой совокупности будет s_1:

$$s_1 = |\mathcal{M}_1|.$$

! **Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.**

Ввиду леммы 9 очевидно, что:

$$s_1 \leqslant s - \frac{sk}{n}.$$

По отношению к $\mathcal{M}_1$ проделаем ту же самую жадную операцию, как и по отношению к $\mathcal{M}$.

Возьмем ν_2, которая принадлежит наибольшему количеству множеств из $\mathcal{M}_1$. Заметим, что это будет второй элемент строящейся системы общих представителей.

Тогда снова по лемме 9:

$$\rho_2 \geqslant \frac{sk}{n}.$$

И так далее. Всего делаем N шагов жадного алгоритма, где:

$$N = \left[\frac{n}{k} \ln \frac{n}{k}\right] + 1, \quad N \geqslant 1, \quad N \leqslant n.$$

В результате остается совокупность множеств $\mathcal{M}_n$. Ее мощность:

$$s_N = |\mathcal{M}_n| \leqslant s_{N-1} - \frac{s_{N-1}k}{n} = s_{N-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant \ldots \leqslant s\left(1 - \frac{k}{n}\right)^N \leqslant$$
$$\leqslant s \exp\left(-\frac{k}{N} N\right) \leqslant s \exp\left(-\frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \cdot \ln \frac{sk}{n}\right) = s \cdot \frac{n}{sk} = \frac{n}{k}.$$

Осталось использовать утверждение 15 для получившейся совокупности:

$$\tau(\mathcal{M}) \leqslant N + \frac{n}{k}.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 59 Пусть:

$$n > 4, \quad k \leqslant \frac{n}{4}, \quad s: \; 4 \leqslant \frac{\ln sk}{n} \leqslant k.$$

Тогда существует $\mathcal{M}$ с этими параметрами n, k, s, такая, что:

$$\tau(\mathcal{M}) \geqslant \frac{1}{32} \cdot \frac{n}{k} \cdot \ln \frac{sk}{n}.$$

Замечание Знаменатель «32» заменяется на примерно «2», если в дальнейшем использовать неравенство:

$$[x] \geqslant x - 1$$

вместо неравенства:

$$[x] \geqslant \frac{x}{2}.$$

! **Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu**

Док-во: Введем вспомогательную переменную:

$$m = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{sk}{n}\right] \geqslant 2.$$

Рассмотрим кусочек будущей «кастрюли» из n элементов (см. рис. 17.3). Этот кусочек состоит из $2m$ элементов.

Положим в такой кусочек все возможные «сосисочки» в числе C_{2m}^m (заметим, что это еще не полноценные «сосиски»).

Обозначим такие «сосисочки»:

$$N_1, \ldots, N_{C_{2m}^m} \subset R_{2m}.$$

Каждая из них имеет мощность:

$$|N_i| = m.$$

Тогда:

$$\tau\Big(\{N_1, \ldots, N_{C_{2m}^m}\}\Big) = m + 1.$$

Теперь размножим маленькую «кастрюльку» (см. рис. 17.4). В каждую такую «кастрюльку» положены все возможные n-элементные «сосисочки».

На рисунке 17.4 используется величина q, она равна:

$$q = \left[\frac{2k}{m}\right].$$

Теперь для первой «кастрюльки» обозначим:

$$N_1^1, \ldots, N_{C_{2m}^m}^1 \subset R_{2m}, \quad |N_i^1| = m,$$

$$\tau\Big(\{N_1^1, \ldots, N_{C_{2m}^m}^1\}\Big) = m + 1.$$

Для оставшихся «кастрюлек» введем аналогичные обозначения. Тогда:

$$M_1 = N_1^1 \sqcup N_1^2 \sqcup \ldots \sqcup N_1^q,$$

$$\ldots$$

$$M_{C_{2m}^m} = N_{C_{2m}^m}^1 \sqcup N_{C_{2m}^m}^2 \sqcup \ldots \sqcup N_{C_{2m}^m}^q.$$

Мощность:

$$|M_i| = qm \geqslant \frac{k}{m}m = k.$$

С другой стороны:

$$C_{2m}^m \leqslant 2^{2m} \leqslant 2^{2\frac{1}{2}\ln\frac{sk}{n}} < \frac{sk}{n}.$$

Заметим, что:

$$\tau\Big(\{M_1, \ldots, M_{C_{2m}^m}\}\Big) = m + 1 > m.$$

! **_Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru._**

Теперь размножим куски мощностью $2qm$ ровно столько раз, сколько это возможно (как показано на рисунке 17.5).

На приведенном рисунке также вводится величина t, она равна:

$$t = \left[\frac{n}{2qm}\right].$$

Тогда:

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}^1 \sqcup \mathcal{M}^2 \sqcup \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{M}^t.$$

Оценим:

$$\tau(\mathcal{M}') > mt \geqslant m \cdot \frac{n}{4qm} = \frac{n}{4q} \geqslant \frac{n}{4 \cdot \frac{2k}{m}} = \frac{nm}{8k} \geqslant \frac{1}{32} \cdot \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

Теперь вспомним про мощность:

$$|\mathcal{M}'| = t \cdot |\mathcal{M}^1| < t \cdot \frac{sk}{n}.$$

Оценим сверху t:

$$t \leqslant \frac{n}{4qm} \leqslant \frac{n}{2m\frac{k}{m}} = \frac{n}{2k}.$$

Тогда:

$$|\mathcal{M}'| < t \cdot \frac{sk}{n} \leqslant \frac{n}{2k} \cdot \frac{sk}{n} = \frac{s}{2}.$$

Осталось осуществить переход:

$$\mathcal{M}' \to \mathcal{M}.$$

Переход будем осуществлять по принципу «отрежем лишнее, добавим недостающее». Первая часть данного принципа выполняется в этом случае тривиально, вторая же получается из утверждения 17.

Тогда теорему можно считать доказанной. ■

! **_Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu_**

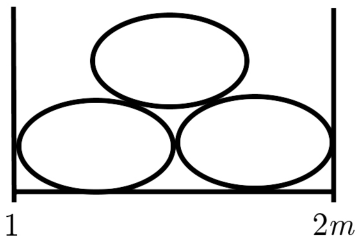

Рис. 17.3

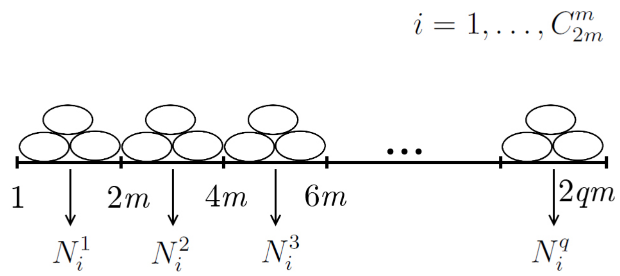

Рис. 17.4

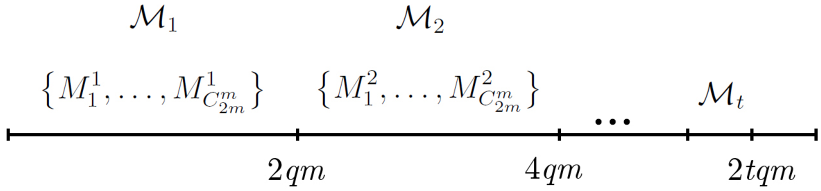

Рис. 17.5