ЛЕКЦИЯ 19

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗУЧЕНИЯ СОП

1. Продолжение рассуждений про переход от теоремы 62 к теореме 61

На прошлой лекции было показано, что:

$$\frac{C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}}}{C^s_{C^k_n}} = \left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - 1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - s + 1}\right).$$

Утверждается, что:

$$\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)^s = \exp\left(-s \cdot \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}(1 + o(1))\right), \tag{19.1}$$

$$\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n - s}\right)^s = \exp\left(-s \cdot \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}(1 + o(1))\right), \tag{19.2}$$

то есть, что:

$$\frac{C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}}}{C^s_{C^k_n}} = \exp\left(-s \cdot \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}(1 + o(1))\right).$$

Замечание Подразумевается, что в выражениях (19.1) и (19.2) функции $o(1)$ — разные. *

Распишем по-другому левую часть выражения 19.1:

$$\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)^s = \exp\left(s \ln\left(1 - \frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{C_{n-l}}{C^k_n} \cdot s(1 + o(1))\right).$$

Чтобы было верно последнее равенство в данной цепочке рассуждений, достаточно убедиться в том, что:

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \to 0.$$

Рассмотрим эту дробь, вспомнив условие теоремы 61, а именно — следующее предположение:

$$k = o(\sqrt{n}).$$

Тогда напишем асимптотику рассматриваемой дроби и далее проведем оценку сверху:

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \sim \frac{C_{n-l}^k}{n^k} \cdot k! \leqslant \frac{(n-l)^k}{k!} \cdot \frac{k!}{n^k} = \left(1 - \frac{l}{n}\right)^k \leqslant \exp\left(-\frac{lk}{n}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{k}{n} \cdot \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}(1+o(1))\right) = \exp\left(-\ln \frac{sk}{n}(1+o(1))\right).$$

Здесь последнее равенство выполняется, так как:

$$l \sim \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}.$$

Также по условию теоремы 61:

$$\ln \frac{sk}{n} \to \infty,$$

следовательно:

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k} \leqslant \exp\left(-\ln \frac{sk}{n}(1+o(1))\right) \to 0.$$

Равенство (19.1) можно считать доказанным.

Далее нужно проделать ту же процедуру для выражения (19.2), то есть — проверить, что:

$$\frac{C_{n-l}^k}{C_n^k - s} \to 0.$$

Очевидно, что это верно, если верно следующее:

$$s = O(C_n^k),$$

так как:

$$s \leqslant C_n^k,$$

и к тому же:

$$\exists c,\ c < 1:\ s < c \cdot C_n^k.$$

Последний факт остается в качестве простого упражнения для самостоятельного решения:

Задача Доказать существование такой константы c, что выполняется следующее неравенство:

$$s < c \cdot C_n^k.$$

Дробь:

$$\frac{C^s_{C^k_n - C^k_{n-l}}}{C^s_{C^k_n}}$$

устроена так же по сути, как и дробь:

$$\frac{C^k_{n-l}}{C^k_n}.$$

Тогда запишем точное выражение:

$$\frac{C^k_{n-l}}{C^k_n} = \left(1 - \frac{l}{n}\right)\left(1 - \frac{l}{n-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right).$$

Необходимо доказать асимптотическое равенство:

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)\left(1 - \frac{l}{n-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{l}{n-k+1}\right) \sim \left(1 - \frac{l}{n}\right)^k.$$

Для этого достаточно проверить, что:

$$\left(1 - \frac{l}{n-k}\right)^k \sim \exp\left(-\frac{lk}{n}\right).$$

Это получается, если доказать следующее:

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)^k \sim \exp\left(-\frac{lk}{n}\right).$$

Далее заметим, что:

$$\frac{l}{n} \sim \frac{\ln \frac{sk}{n}}{k} \to 0.$$

Тогда, из разложения в ряд Тейлора:

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)^k = \exp\left(-\frac{lk}{n} + O\Big(\frac{l^2}{n^2} \cdot k\Big)\right).$$

Здесь:

$$\exp\left(O\Big(\frac{l^2}{n^2}k\Big)\right) = \exp\left(O\Big(\frac{n^2}{k^2}\ln^2\frac{sk}{n} \cdot \frac{k}{n^2}\Big)\right) = \exp\left(O\Big(\frac{\ln^2 \frac{sk}{n}}{k}\Big)\right).$$

По условию теоремы 61:

$$\ln^2 \frac{sk}{n} = o(k),$$

следовательно:

$$\frac{\ln^2 \frac{sk}{n}}{k} \to 0, \quad O\left(\frac{\ln^2 \frac{sk}{n}}{k}\right) \to 0,$$

а значит:

$$\exp\left(O\Big(\frac{\ln^2\frac{sk}{n}}{k}\Big)\right)\to 1.$$

Получим:

$$\exp\left(-\frac{lk}{n}\right)\cdot\exp\left(O\Big(\frac{l^2}{k^2}k\Big)\right)\sim\exp\left(-\frac{lk}{n}\right).$$

Этим объяснилось, зачем нужно еще одно ограничение из условия теоремы 61. Можно видеть, что это оказалось последним неиспользуемым в приведенных рассуждениях ограничением.

Теперь проверим:

$$\left(1-\frac{l}{n-k}\right)^k=\exp\left(-\frac{lk}{n-k}+O\Big(\frac{l^2}{(n-k)^2}k\Big)\right).$$

Но:

$$O\left(\frac{l^2}{(n-k)^2}k\right)=O\left(\frac{l^2}{n^2}k\right)\to 0.$$

Тогда:

$$\exp\left(-\frac{lk}{n-k}+O\Big(\frac{l^2}{(n-k)^2}k\Big)\right)\sim\exp\left(-\frac{lk}{n-k}\right).$$

Теперь распишем:

$$\frac{lk}{n-k}=\frac{lk}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{k}}=\frac{lk}{n}\left(1-\frac{k}{n}+O\Big(\frac{k^2}{n^2}\Big)\right)=\frac{lk}{n}-\frac{lk^2}{n^2}+O\left(\frac{lk^3}{n^3}\right).$$

Здесь:

$$\frac{lk^2}{n^2}\sim\frac{n}{k}\cdot\ln\frac{sk}{n}\cdot\frac{k^2}{n^2}=\frac{k}{n}\cdot\ln\frac{sk}{n}.$$

Так как:

$$n\gg k^2,$$

то получим:

$$\frac{k}{n}\cdot\ln\frac{sk}{n}\ll\frac{\ln\frac{sk}{n}}{k}\to 0.$$

В итоге получается, что:

$$\frac{lk^2}{n^2}+O\left(\frac{lk^3}{n^3}\right)\to 0.$$

Следовательно, получена искомая асимптоматика.

Таким образом, переход от теоремы 62 к теореме 61 можно считать завершенным.

2. Еще одна теорема о СОП

Теперь запишем еще одну теорему о свойствах системы общих представителей. Заметим, что ее формулировка не будет уступать по красоте формулировке теоремы 62.

Теорема 63 Пусть известны параметры n, k, s. Рассмотрим произвольные параметры l.
Обозначим:

$$\overline{n} = C_n^k, \quad \overline{k} = C_{n-l}^k, \quad \overline{s} = C_n^l.$$

Предположим, что для данного l выполняется неравенство:

$$\max\left\{\frac{\overline{n}}{\overline{k}} \ln \frac{\overline{sk}}{\overline{n}}, \frac{\overline{n}}{\overline{k}}\right\} + \frac{\overline{n}}{\overline{k}} + 1 \leqslant s.$$

Тогда:

$$\exists \mathcal{M}(n, k, s): \; \tau(\mathcal{M}) > l.$$

Док-во: Нужно построить совокупность:

$$\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}, \; |M_i| = k: \; \tau(\mathcal{M}) > l.$$

Это значит, что:

$$\forall L \subset \{1, 2, \dots, n\}, \; |L| = l \quad \exists M_i \in \mathcal{M}: \; M_i \cap L = \emptyset.$$

Это равносильно следующему:

$$M_i \subset \{1, 2, \dots, n\} \; L.$$

Теперь запишем формально. Рассмотрим все k-элементные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим такие подмножества:

$$K_1, \dots, K_{C_n^k}.$$

Перейдем от обозначений самих k-элементных подмножеств к их индексам, то есть к номерам:

$$1, \dots, C_n^k.$$

Рассмотрим каждое $(n-l)$-элементное подмножество:

$$L_j \in \{1, 2, \dots, n\}, \; j = 1, \dots, C_n^k,$$

и все такие i:

$$i \in \{1, \dots, C_n^k\}: \; K_i \in L_j.$$

Количество таких i есть:

$$\overline{k} = C_{n-l}^k.$$

Они образуют подмножество Λ_j мощности $\overline{k}$ в множестве:

$$\left\{1, 2, \dots, C_n^k\right\} = \{1, 2, \dots, \overline{n}\}.$$

Возьмем любую минимальную систему общих представителей для следующей совокупности:

$$\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\overline{s}}.$$

Обозначим ее:

$$\sigma_1, \dots, \sigma_\tau.$$

Здесь:

$$\tau = \tau(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\overline{s}}).$$

По определению системы общих представителей:

$$\forall j = 1, \dots, \overline{s} \quad \exists i: \ \sigma_i \in \Lambda_j.$$

Тогда это равносильно следующему:

$$\forall j = 1, \dots, \overline{s} \quad \exists i: \ K_{\sigma_i} \subset L_j.$$

Рассмотрим далее:

$$\mathcal{M} = \{K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_\tau}\}.$$

Тогда:

$$\tau(\mathcal{M}) > l.$$

По условию теоремы 63:

$$\tau = |\mathcal{M}| \leqslant s,$$

так как по теореме **??**:

$$\tau \leqslant \max\left\{\frac{\overline{n}}{\overline{k}} \ln \frac{\overline{sk}}{\overline{n}}, \frac{\overline{n}}{\overline{k}}\right\} + \frac{\overline{n}}{\overline{k}} + 1,$$

что и требовалось доказать. ■