
ЛЕКЦИЯ 1

ВВЕДЕНИЕ. ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ

1. Введение в математическую логику

Рекомендуемая литература по данному курсу — трилогия *Верещагина и Шеня*: «Начала теории множеств», «Языки и исчисления», «Вычислимые функции».

Математическая логика изучает, что такое утверждение, рассуждение и доказательство (как формулировать утверждение, как из одних утверждений выводить другие, какие рассуждения считаются доказательствами и так далее).

Теория алгоритмов изучает программы и работу программ с рассуждениями. Хорошее рассуждение-доказательство в логике должно быть таким, чтобы программа могла безошибочно его применить.

Любое утверждение или рассуждение — это некоторый текст, записанный на каком-то формальном языке (с использованием знаков кванторов, принадлежности, логические переменные и другие символы формального языка). Чтобы рассуждать о логике, нужно научиться рассуждать о формальных языках.

Пример 1 Приведем пример неверно проведенных рассуждений. Собака думает: «У кошки четыре ноги, и у меня четыре ноги. Значит, я — кошка». В данной цепочке рассуждений не соблюдены логические правила вывода. *

Пример 2 (Гипотеза четырех красок) Данный пример демонстрирует значение теории алгоритмов в современной науке.

Известна теория четырех красок о том, что любую географическую карту можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы стороны одного цвета не имели общие участки границ. Ученые подошли к решению этой задачи, написав компьютерную программу, которая перебрала все возможные случаи. Этим было доказано, что гипотеза четырех красок — верна.

Это был один из первых успехов «компьютерных» доказательств, так как в научном сообществе до этого доказательством было принято считать некий текст, который можно



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

было прочесть и убедиться в правильности доказательства. Однако, в данном случае пришлось поверить в то, что программа написана верно. *

Таким образом, в связи с развитием технологий, для убедительности «компьютерных» доказательств были разработаны различные системы проверки программ.

2. Формальные языки

Для начала определим некоторые базовые понятия.

Определение 1: *Алфавитом* называется конечное непустое множество (например, русский алфавит или Unicode). ♣

Определение 2: *Символ* — это элемент алфавита. ♣

Определение 3: *Словом* называется любая конечная последовательность символов. ♣

Определение 4: *Язык* — это любое множество слов. ♣

Далее будет изучаться, как описать правилами какой-либо бесконечный язык.

Операции над словами:

1. *Конкатенация*, или приписывание, обозначается $a \cdot b$. В результате данной операции два слова a и b записываются подряд. Нетрудно видеть, что конкатенация — ассоциативна.
2. *Обращение* обозначается a^R . В результате данной операции получается слово с переставленными в обратном порядке буквами.

Определение 5: *Пустое слово* — это слово, в котором нет ни одной буквы. Обозначается ϵ (в некоторых источниках обозначается также λ или Λ). ♣

Заметим, что:

$$a \cdot \epsilon = \epsilon \cdot a = a; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c; \quad (a \cdot b)^R = b^R \cdot a^R.$$

Определение 6: *Степень* определяется так:

$$L^0 = \{\epsilon\}, \quad L^{n+1} = L^n \cdot L,$$

где L — некоторый язык. ♣

Операции над языками:

1. *Объединение* — наиболее часто используемая операция.
2. *Конкатенация* определяется следующим образом:

$$L \cdot M = \{a \cdot b \mid a \in L, b \in M\}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

3. *Итерация* (иначе называется звезда Клини):

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

4. *Плюс Клини* — это:

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots = L \cdot L^*$$

Также существуют и другие теоретико-множественные операции над языками.

Будем использовать удобные обозначения: если Σ — алфавит, то Σ^* — множество всех слов в данном алфавите, а Σ^+ — множество всех непустых слов.

Пример 3 Если $L = \{0, 01\}$ и $M = \{0, 10\}$, то конкатенация даст следующее:

$$L \cdot M = \{00, 010, 0110\}.$$

Отношения между словами:

1. *Префикс*:

$$u \sqsubset v \iff \exists w \ v = u \cdot w.$$

2. *Суффикс*:

$$u \sqsupset v \iff \exists w \ v = w \cdot u.$$

3. *Подслово*: u является подсловом v тогда и только тогда, когда:

$$\exists w, t \ v = w \cdot u \cdot t.$$

4. *Подпоследовательностью* называется u в том случае, если u получается из v вычеркиванием некоторых букв.

Замечание Некоторые слова в отношениях между словами могут быть пустыми. Таким образом, любое слово является и префиксом, и суффиксом, и подсловом самого себя. *

Определение 7: *Скобочной последовательностью* называется слово в алфавите, состоящим из открывающихся и закрывающихся скобок, то есть $\{(,)\}^*$. ♣

Правильно построенная скобочная последовательность имеет три определения. Довольно важно понимать, почему все эти определения — эквивалентны.

Определение 8: *Первое определение ПСП* **Правильной скобочной последовательностью** называется такая последовательность, в которой все скобки разбиты на пары, в каждой из которых есть одна открывающая и одна закрывающая скобка, причем открывающая скобка раньше закрывающей. ♣

Определение 9: *Второе определение ПСП* Назовем **скобочным итогом** разность числа открывающих скобок и числа закрывающих. У **правильной скобочной последовательности** скобочный итог должен быть нулевым, а у любого ее префикса — неотрицательным. ♣

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Определение 10: Третье определение ПСП Данное определение дается способом, отличным от первых двух определений. Сначала необходимо отметить, что пустое слово является правильной скобочной последовательностью.

Если S — это **правильная скобочная последовательность**, то скобочная последовательность вида (S) — также правильная.

Если имеются две правильные скобочные последовательности S_1 и S_2 , то скобочная последовательность $S_1 \cdot S_2$ — также правильная.

Никаким другим способом, кроме этих трех, правильную скобочную последовательность получить нельзя. ♣

Теорема 1 Все три определения правильной скобочной последовательности — эквивалентны. *

Док-во: Первая часть ($1 \Rightarrow 2$): из каждой пары в любом префиксе имеется либо ноль скобок, либо две, либо одна более ранняя.

Если их ноль — то к скобочному итогу добавляется ноль. Ноль к скобочному итогу добавляется и в случае двух скобок (то есть сначала прибавляется единица, затем вычитается).

В случае, если скобка одна, то, по первому определению правильной скобочной последовательности, эта скобка — открывающая. Следовательно, к скобочному итогу добавляется единица.

Таким образом, в сумме точно получается неотрицательное число. Но во всей скобочной последовательности содержатся все пары, значит, конечный скобочный итог равен нулю.

Вторая часть ($2 \Rightarrow 3$): здесь понадобится использовать индукцию по длине последовательности.

База индукции: для пустого слова с длиной, равной нулю, скобочный индекс равняется нулю, следовательно, это — правильная скобочная последовательность.

Переход индукции: пусть S соответствует второму определению ПСП. Тогда возможны два варианта.

Первый вариант заключается в том, что:

$$\exists T \sqsubset S \quad T \neq \epsilon, \quad T \neq S,$$

причем скобочный итог T равен нулю.

Тогда, во-первых, T удовлетворяет второму определению ПСП, а во-вторых, $S = T \cdot U$, и U также удовлетворяет второму определению.

Таким образом, слова T и U короче слова S и удовлетворяют второму определению. Следовательно, по предположению индукции они удовлетворяют третьему определению правильной скобочной последовательности. Тогда и $S = T \cdot U$ также удовлетворяет третьему определению.

Второй вариант выглядит так:

$$T \sqsubset S, \quad T \neq \epsilon, \quad T \neq S,$$

причем скобочный итог T положителен.



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Тогда $S = (U)$, где U удовлетворяет второму определению. Это верно, потому что:

$$T = (T', \quad T' \sqsubset U.$$

Тогда скобочный итог T положителен, а следовательно, скобочный итог T' — неотрицателен. Значит, U удовлетворяет второму определению ПСП.

Далее, по предположению индукции получим, что U удовлетворяет третьему определению. Следовательно, $S = (U)$ также удовлетворяет третьему определению.

Третья часть ($3 \Rightarrow 1$): если имеется скобочная последовательность вида (S) , то внешние скобки являются одной скобочной парой, а внутри S содержатся все остальные.

Если рассматривается скобочная последовательность вида $S_1 \cdot S_2$, то объединим все пары из S_1 и S_2 для получения желаемого результата.

Теорема 1 доказана. ■

3. Однозначность синтаксического разбора

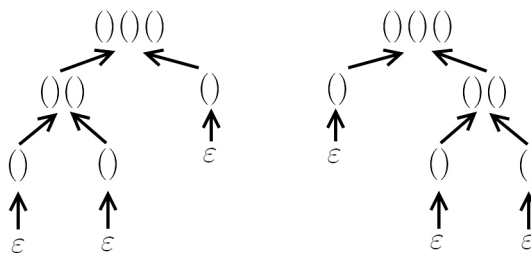


Рис. 1.1

Рассмотрим скобочную последовательность вида $()()()$. Ее можно получить различными способами (см. рис. 1.1). Деревья, представленные на этих рисунках, являются **деревьями синтаксического разбора**. В рассматриваемой ситуации — разбор неоднозначен.

В логике очень важно, чтобы разбор был однозначен, так как работа с формулой в дальнейшем часто зависит от того, как эта формула была получена.

Пример 4 Пусть рассматривается формула:

$$A \cup B \cap C.$$

Без расставленных скобок и соглашений о приоритете непонятно, что имеется в виду (см. рис. ?? и 1.2). В зависимости от разных прочтений будут получаться разные рисунки. *

Таким образом, скобки или правила приоритета в аналогичных ситуациях необходимы. Так как правила приоритета применять сложнее, будем в дальнейшем при необходимости расставлять скобки.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

6

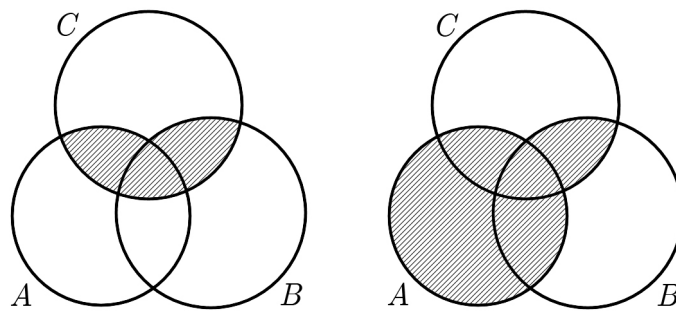


Рис. 1.2

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu