ЛЕКЦИЯ 5

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Аксиомы и правила вывода

Если рассматривать другую семантику, то в ней будет другим понятие «тавтология». Основная идея исчисления высказываний состоит в том, что оговаривается некоторое ограниченное количество формул, которые будут считаться аксиомами, а все остальные формулы должны выводиться из данного множества по некоторым правилам вывода.

Системы аксиом могут быть разными, в связи с чем существует много различных вариантов исчислений высказываний. Все варианты исчислений объединяет то, что во всех есть свой конкретный список аксиом и свои правила вывода.

Например, у исчисления высказываний *гильбертовского типа* много аксиом и мало правил вывода. Бывают и обратные ситуации (когда в исчислении мало аксиом и много правил вывода). В данном курсе будут изучаться исчисления высказываний гильбертовского типа — будет задано много аксиом и всего одно правило вывода.

Список аксиом:

1. $A \to (B \to A)$ (истина следует из чего угодно);
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
3. $(A \wedge B) \to A$;
4. $(A \wedge B) \to B$;
5. $A \to (B \to (A \wedge B))$ (если верны A и B, то верна их конъюнкция);
6. $A \to (A \vee B)$;
7. $B \to (A \vee B)$;
8. $(A \to C) \to \Big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\Big)$ (правило разбора случаев);

9. $\neg A \to (A \to B)$ (из лжи следует что угодно);

10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (принцип доказательства от противного);

11. $A \vee \neg A$ (закон исключенного третьего).

Последняя аксиома вызывала множество дискуссий. В частности, отказ от использования данной аксиомы привел к созданию *интуиционистской логики*, о которой будет рассказано в дальнейших лекциях этого курса.

Доказательство следующего утверждения является демонстрацией использования закона исключенного третьего:

Утверждение 2 Существуют два таких иррациональных числа, что при возведении одного в степень другого получится рациональное число, то есть:

$$\exists x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}:\ x^y \in \mathbb{Q}.$$

Док-во: Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Возможны два варианта — данное число является либо рациональным, либо иррациональным.

В случае, если число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рациональное, получим, что $x = y = \sqrt{2}$, и утверждение верно.

В случае, если рассматриваемое число является иррациональным, получим $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$. И то, и другое число является иррациональным (по предположению). Тогда можно записать:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Получается, что в обоих случаях найдены подходящие x и y. Утверждение доказано.■

Для исчисления высказываний помимо списка аксиом задается **правило вывода (modus ponens):**

$$\frac{A \quad A \to B}{B}.$$

Здесь и далее горизонтальная черта в подобных записях означает следующее: если верно A, и если также верно $A \to B$, то верно B.

Определение 32: Вывод *— это конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по правилу вывода (modus ponens).* ♣

Замечание В аксиомах и в правиле вывода буквы A, B и C обозначают не обязательно переменные — ими могут быть и какие-то формулы. В частности, поэтому пуристы говорят, что в исчислении высказываний задается не список аксиом, а схема аксиом. $*$

Определение 33: *Говорят, что формула ϕ является **выводимой**, если существует вывод, в котором имеется ϕ.* ♣

Утверждение 3 Формула $A \to A$ — выводима, то есть:

$$\vdash (A \to A).$$

Док-во: Запишем вывод данной формулы:

1. $A \to ((A \to A) \to A)$ (по аксиоме 1, где $B = (A \to A)$);
2. $\Big(A \to ((A \to A) \to A)\Big) \to \Big((A \to (A \to A)) \to (A \to A)\Big)$ (по аксиоме 2);
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (по modus ponens для пунктов вывода 1 и 2);
4. $A \to (A \to A)$ (по аксиоме 1, где $B = A$);
5. $A \to A$ (по modus ponens для пунктов вывода 3 и 4).

Таким образом, показано, что формула $A \to A$ — выводима. ■

2. Теорема о корректности и лемма о дедукции

Дальнейшая цель — создать такое исчисление высказываний, чтобы выводились тавтологии и только они.

Теорема 6 (О корректности) Если ϕ — выводима, то ϕ является тавтологией. $*$

Док-во: Очевидно, что все аксиомы — это тавтологии. Идея доказательства заключается в том, что если A и $A \to B$ — это тавтологии, то B — тоже тавтология. ■

Теперь введем некоторый инструментарий, который понадобится для достижения поставленной цели — доказательства теоремы о полноте, обратной к теореме о корректности.

Определение 34: Выводимость из посылок: *если Γ — это множество формул, то вывод из этого множества — это конечная последовательность формул, в которой каждая формула либо является аксиомой, либо принадлежит Γ, либо получается по правилу вывода. Обозначается $\Gamma \vdash \phi$ (ϕ выводима из Γ).* ♣

Лемма 2 (О дедукции)

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash A \to B.$$

Замечание Лемма о дедукции — это связь между выводимостью и импликацией. $*$

Докажем лемму 2:

Док-во: <u>Первая часть ($\Leftarrow$):</u> доказательство в эту сторону легко записывается в виде вывода:

1. $\Gamma \vdash A \to B$;

2. A (так как A имеется в списке посылок);

3. B (по modus ponens).

Вторая часть ($\Rightarrow$): пусть $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — это вывод B из $\Gamma \cup \{A\}$. Докажем по индукции, что из Γ выводится $A \to c_i$.

Первый случай: c_i — это аксиома. Тогда добавим в вывод следующую цепочку:

1. c_i (как аксиома);

2. $c_i \to (A \to c_i)$ (по аксиоме 1);

3. $A \to c_i$ (по modus ponens из пунктов 1 и 3).

Второй случай: $c_i \in \Gamma$. Этот случай решается добавлением в вывод цепочки, аналогичной представленной в первом случае.

Третий случай: $c_i = A$. Добавим в вывод $A \to A$.

Четвертый случай: c_i получена по modus ponens. Следовательно:

$$\exists i,\ \exists k < i: \ c_k = c_j \to c_i.$$

Воспользуемся предположением индукции:

$$\Gamma \vdash A \to c_j; \quad \Gamma \vdash A \to c_k = A \to (c_j \to c_i).$$

По второй аксиоме:

$$(A \to (c_j \to c_i)) \to ((A \to c_j) \to (A \to c_i)).$$

Применив дважды modus ponens, получим:

$$(A \to c_j) \to (A \to c_i); \quad A \to c_i,$$

что и требовалось доказать. ■

Приведем пример применения леммы о дедукции:

Пример 14 **Силлогизм** выглядит следующим образом:

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Если в данной записи A — это Сократ, B — это утверждение, что объект является человеком, а C — это утверждение, что объект является смертным, то получим известную с древности логическую цепочку.

Это — тавтология. Выведем ее:

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \quad \Longleftrightarrow \quad A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C).$$

Применим лемму о дедукции во второй раз:

$$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C \quad \Longleftrightarrow \quad A,\ A \to B,\ B \to C \vdash C.$$

Здесь также был применен modus ponens. Таким образом, видно, что лемма о дедукции действительно укорачивает выводы. К тому же, можно заметить, почему лемма называется «о дедукции» — идет переход от общего к частному. *

3. Дополнительные правила вывода

Лемму о дедукции можно использовать также в создании дополнительных правил вывода.

Первое дополнительное правило вывода:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}.$$

Здесь используется не лемма о дедукции, а только пятая аксиома. Приведем вывод данного правила:

1. A;
2. B;
3. $A \to (B \to (A \wedge B))$;
4. $B \to (A \wedge B)$;
5. $A \wedge B$.

Второе дополнительное правило вывода:

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash C \quad \Gamma,\ B \vdash C}{\Gamma,\ A \vee B \vdash C}.$$

Вывод второго правила:

1. $\Gamma,\ A \vdash C \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash A \to C$;
2. $\Gamma,\ B \vdash C \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash B \to C$;
3. $\Gamma \vdash (A \vee B) \to C$ (по аксиоме 8);
4. $\Gamma,\ A \vee B \to C$ (по лемме о дедукции).

Важным частным случаем является случай, когда $B = \neg A$. Тогда:

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash C \quad \Gamma,\ \neg A \vdash C}{\Gamma \vdash C}.$$

Третье дополнительное правило вывода:

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B \quad \Gamma,\ A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}.$$

4. Примеры

Пример 15 *Закон навешивания двойного отрицания:* $A \to \neg\neg A$.

Вывод закона:

1. $\vdash A \to \neg\neg A \quad \Longleftrightarrow \quad A \vdash \neg\neg A$ (по лемме о дедукции);

2. $A \vdash \neg\neg A \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} A, \ \neg A \vdash B, \\ A, \ \neg A \vdash \neg B. \end{cases}$ *

Пример 16 *Закон снятия двойного отрицания:* $\vdash \neg\neg A \to A$.
Вывод закона:

1. $\vdash \neg\neg A \to A \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\neg A \vdash A$ (по лемме о дедукции);

2. $\neg\neg A \vdash A \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \neg\neg A, \ A \vdash A, \\ \neg\neg A, \ \neg A \vdash A. \end{cases}$ *

Последний переход верный, так как по девятой аксиоме можно записать:

$$\neg\neg A \to (\neg A \to A).$$

Замечание В список аксиом вместо аксиомы 11 (закон исключенного третьего) можно поставить закон снятия двойного отрицания (пример 16). Тогда будет выводим закон исключенного третьего. Рекомендуется проделать этот вывод самостоятельно в качестве упражнения. *

Пример 17 *Контрапозиция:* $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.
Вывод:

1. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \quad \Longleftrightarrow \quad A \vdash B, \ \neg B \vdash \neg A$ (по лемме о дедукции);

2. $A \vdash B, \ \neg B \vdash \neg A \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} A \to B, \ \neg B, \ A \vdash B, \\ A \to B, \ \neg B, \ A \vdash \neg B. \end{cases}$ *

Пример 18 Случай из примера 17 в обратную сторону: $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
Вывод:

1. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg B \to \neg A, \ A \vdash B$ (по лемме о дедукции);

2. $\neg B \to \neg A, \ A \vdash B \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \neg B \to \neg A, \ A, \ B \vdash B, \\ \neg B \to \neg A, \ A, \ \neg B \vdash B. \end{cases}$

Последний переход верен в силу закона исключенного третьего. *