ЛЕКЦИЯ 7

ЛОГИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Введение в логику первого порядка

Есть два основных квантора — существования ($\exists$) и всеобщности ($\forall$). Помимо кванторов есть также не логические, а математические знаки, связывающие высказывания между собой.

При этом, записи вида $\exists x$ либо $\forall x$ — недостаточно, необходимо уточнить, какой именно x рассматривается (например, натуральное или действительное число, точка на плоскости и так далее). Таким образом, всегда указано множество математических объектов, к которому принадлежит x.

Допустим, рассматриваются два выражения, первое из которых выглядит следующим образом:

$$\forall x \; \exists y \; x < y,$$

которое означает, что не существует максимального элемента, и второе выражение:

$$\neg \forall x \; x \text{ — хорошее} \quad \exists x \; x \text{ — нехорошее}.$$

Разница между двумя этими примерами состоит в том, что во втором выражении не говорится, что именно означает фраза «x — хорошее», а также не указывается, из какого множества x берется.

В данной лекции будут изучаться формулы с кванторами. Будет разобрано, как понять, истинно ли то или иное выражение.

Логика первого порядка означает, что кванторы ставятся по переменным, а не по более сложным структурам. В логике второго порядка кванторы ставятся уже по формулам.

2. Синтаксис логики первого порядка

Для начала необходимо перечислить, какие бывают **символы:**

1. $x, y, z, \ldots$ — **индивидные переменные**. Эти переменные носят такое название,

так как они обозначают некоторые объекты, например, числа или точки на плоскости.

2. $P, Q, R, \ldots$ — **предикатные символы**. Эти символы обозначают некоторые предикаты.

3. $f, g, h, \ldots$ — **функциональные символы**. Функции берутся из M^k в M. Здесь также необходимо знать **валентность** k, чтобы понимать, корректна ли запись.

   Отдельным классом функциональных символов являются **константные символы** (то есть функциональные символы при $k = 0$).

4. $\neg, \wedge, \vee, \to$ — **логические операции**.

5. $\forall, \exists$ — **кванторы**.

6. «(», «)», «,» — **служебные символы**.

Замечание Некоторые авторы выделяют константные символы в отдельную группу символов. В данном курсе будет считаться, что константные символы являются классом функциональных символов, как было продемонстрировано выше. $*$

3. Основные определения

Определение 38: Предикатом *называется функция из M^k в $\{0, 1\}$, где M — это множество, в котором принимают значения переменные, а k называется* ***валентностью*** *предиката.* ♣

Пример 20 Запишем различные предикатные символы валентности 2:

$$>,\ <,\ \geqslant,\ \leqslant,\ =,\ \subset,\ \sqsubset,\ \ldots .$$

Эти символы ставятся привычным образом между двумя переменными (например, $x < y$).

В случае предикатных символов с валентностью 3 и больше предикатный символ ставится перед переменными, заключенными в скобки (например, $P(x, y, z)$). При этом такая запись считается верной, если валентность предиката совпадает с количеством переменных в скобках. $*$

Пример 21 Рассмотрим выражение:

$$\forall x\ \exists y\ x = y + y.$$

Здесь знак «+» является функциональным символом. Другие примеры функциональных символов:

$$+,\ \cdot,\ \sqrt{\ },\ \sin,\ \log,\ \ldots .$$

Определение 39: Сигнатурой *называется набор всех используемых предикатных и функциональных символов с указанием валентности (то есть про каждый символ сказано, сколько у него аргументов).* ♣

Определение 40: Термы *определяются следующим образом:*

1. *Если есть индивидная переменная x, то x является термом.*
2. *Если c — это константный символ (функциональный символ валентности ноль), то c является термом.*
3. *Если f — это функциональный символ валентности $k \geqslant 1$, а $t_1, \dots, t_k$ — это термы, то $f(t_1, \dots, t_k)$ тоже является термом.* ♣

Пример 22 Рассмотрим выражение:

$$f(g(x, y, c), h(z)).$$

Здесь есть три переменные (x, y, z), а также функциональные символы. Функциональный символ c — валентности 0, h — валентности 1, f — валентности 2 и g — валентности 3. $*$

Пример 23 Рассмотрим выражение:

$$\sin x + \log (y \cdot z^2).$$

Здесь функциональный символ «+» — валентности 2, «sin» — валентности 1, «log» — валентности 1, «·» — валентности 2. Возведение в степень также валентности 2, так как применяется к z и 2. $*$

Определение 41: Атомарная формула *— это формула вида $P(t_1, \dots, t_k)$, где P — это предикатный символ валентности k, а $t_1, \dots, t_k$ — это термы.* ♣

Пример 24 Рассмотрим следующую атомарную формулу:

$$x + 1 < \sin(\log(y \cdot z)).$$

Здесь два терма и один предикатный символ валентности 2.

Для предикатного символа валентности 3 также можно записать пример атомарной формулы:

$$P\Big(f(x), g(y, f(x)), h(f(y))\Big).$$

Из атомарных формул можно собирать более сложные формулы при помощи чисто логических операций.

Определение 42: Формула *определяется следующим образом:*

1. *Атомарная формула является формулой.*
2. *Если ϕ и ψ — это формулы, то $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$ — тоже формулы.*
3. *Если ϕ является формулой, то $\exists x\, \phi$ и $\forall x\, \phi$ — тоже формулы.* ♣

Пример 25 Рассмотрим формулу вида:

$$\exists x \left(x < 2 \ \lor \ \forall y \ x > y\right).$$

Здесь атомарные формулы — это формулы $x < 2$ и $x > y$. По правилам из определения 42 получена итоговая формула. $*$

Есть два типа формул — замкнутые и незамкнутые. Чтобы определить их, необходимо сначала определить два типа переменных:

Определение 43: ***Свободными переменными*** *называются переменные без квантора.* ***Связанными переменными*** *называются переменные, по которым стоит квантор.* ♣

Пример 26 Рассмотрим следующее выражение:

$$\forall x \ x < y.$$

Здесь x — это связанная переменная, а y — свободная переменная.
Если же рассмотреть формулу вида:

$$\left(\forall x \ x < y\right) \lor \exists y \ P(y),$$

то здесь переменная y с одной стороны будет свободной, а с другой — связанной. Поэтому более корректно говорить не о свободных и связанных переменных, а о свободных и связанных вхождениях переменных (согласно области действия соответствующих кванторов). $*$

Определение 44: *Если в формуле все переменные — связанные, то она называется* ***замкнутой***. *Если же в формуле не все переменные являются связанными, то формула называется* ***незамкнутой***. ♣

Определение 45: ***Интерпретация*** *определяется следующим образом:*

1. *Множество $M \neq \emptyset$ называется* ***носителем интерпретации***.

2. *Если есть P — предикатный символ валентности k, то ему сопоставляется предикат валентности k, то есть функция из M^k в $\{0,1\}$. Предикат обозначается $[P]$.*

3. *Еслим есть f — функциональный символ валентности k, то ему сопоставляется функция валентности k из M^k в M. Функция обозначается $[f]$.* ♣

Определение 46: ***Оценка*** *— это функция из V в M, где V — это множество всех переменных, а M — множество всех объектов.*
Оценка обозначается π. Тогда $\pi(x)$ — это значение переменной x. ♣

Определение 47: Значения термов *обозначаются* $[t](\pi)$ *(значение терма* t *на оценке* π*). Здесь будем считать, что интерпретация задана, а оценка — нет.*

Тогда значения термов определяются следующим образом:

1. $[x](\pi) = \pi(x)$ *(оценка* π *задает значение всех переменных).*
2. $[c](\pi) = [c]$*, где* c *— это константный символ.*
3. $[f(t_1, \dots, t_k)](\pi) = [f]\Big([t_1](\pi), \dots, [t_k](\pi)\Big)$. ♣

Определение 48: Значения формул *задаются следующим образом:*

1. $[P(t_1, \dots, t_k)](\pi) = [P]\Big([t_1](\pi), \dots, [t_k](\pi)\Big)$ *(для атомарной формулы).*
2. $[\neg\phi](\pi) = \neg[\phi](\pi)$.
3. $[\phi \wedge \psi](\pi) = [\phi](\pi) \wedge [\psi](\pi)$.
4. $[\phi \vee \psi](\pi) = [\phi](\pi) \vee [\psi](\pi)$.
5. $[\phi \to \psi](\pi) = [\phi](\pi) \to [\psi](\pi)$. ♣

Для формул с кванторами необходимо пояснить отдельно:

$$[\exists x\, \phi](\pi) = \bigvee [\phi](\pi'),$$

где $\pi'(x)$ — любое, а $\pi'(y) = \pi(y)$ при $y \neq x$.

Для квантора всеобщности определим симметрично:

$$[\forall x\, \phi](\pi) = \bigwedge [\phi](\pi'),$$

где $\pi'(x)$ — любое, а $\pi'(y) = \pi(y)$ при $y \neq x$.

4. Параметры формулы

Далее необходимо понять, почему формула зависит только от значений свободных переменных. Для этого введем понятие:

Определение 49: Параметры формулы *(*$\mathrm{Par}\,\phi$*) определяются следующим образом:*

1. *Если* ϕ *— это атомарная формула, то* $\mathrm{Par}(\phi)$ *— это множество всех переменных, входящих в данную формулу.*
2. $\mathrm{Par}(\neg\phi) = \mathrm{Par}(\phi)$.
3. $\mathrm{Par}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{Par}(\phi) \cup \mathrm{Par}(\psi)$.
4. $\mathrm{Par}(\phi \vee \psi) = \mathrm{Par}(\phi) \cup \mathrm{Par}(\psi)$.
5. $\mathrm{Par}(\phi \to \psi) = \mathrm{Par}(\phi) \cup \mathrm{Par}(\psi)$.

6. $\mathrm{Par}(\exists x\, \phi) = \mathrm{Par}(\phi)\ \{x\}$.

7. $\mathrm{Par}(\forall x\, \phi) = \mathrm{Par}(\phi)\ \{x\}$. ♣

Теорема 11 Значение ϕ зависит только от значений ее параметров, то есть:

$$\forall x \in \mathrm{Par}(\phi) \quad \pi(x) = \pi'(x) \ \Rightarrow\ [\phi](\pi) = [\phi](\pi'). \tag{7.1}$$

*

Замечание В частности, если формула замкнутая, то ее множество параметров — это пустое множество. Значит, для замкнутой формулы посылка теоремы 11 автоматически верна.

Следовательно, значение замкнутой формулы вообще не зависит от оценки, а зависит от интерпретации. *

Док-во: Доказательство теоремы будет вестись индукцией по построению формулы.

Если ϕ — атомарная формула, то доказательстово «очевидно» (то есть оно простое, но долгое, опустим его).

Далее нужно доказать, что если выражение (7.1) верно для ϕ, то оно верно и для отрицания ϕ. Тогда:

$$[\neg\phi](\pi) = \neg[\phi](\pi) = \neg[\phi](\pi') = [\neg\phi](\pi').$$

Здесь используется тот факт, что у ϕ и $\neg\phi$ множество параметров — одно и то же:

$$\mathrm{Par}(\phi) = \mathrm{Par}(\neg\phi).$$

Для конъюнкции запишем:

$$[(\phi \wedge \psi)](\pi) = [\phi](\pi) \wedge [\psi](\pi) = [\phi](\pi') \wedge [\psi](\pi') = [\phi \wedge \psi](\pi').$$

Пусть $\pi_1(y) = \pi_2(y)$ при $y \in \mathrm{Par}(\phi)\ \{x\}$. Тогда конъюнкция будет выглядеть следующим образом:

$$\bigwedge [\phi](\pi_1') = \bigwedge [\phi](\pi_2'),$$

где $\pi_1'(x)$ и $\pi_2'(x)$ — любые, $\pi_1'(y) = \pi_1(y)$ при $y \neq x$ и $\pi_2'(y) = \pi_2(y)$ также при $y \neq x$.

От остальных переменных ни левая, ни правая часть выражения не зависят (по предположению индукции), и поэтому они равны.

Теорема 11 доказана. ■