ЛЕКЦИЯ 11

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Аксиомы исчисления предикатов

Можно сказать, что исчисление предикатов — это то же, что исчисление высказываний, только в формулах с кванторами. Конечной целью изучения данной темы является доказательство теоремы о полноте.

Имеются следующие **аксиомы исчисления предикатов:**

Аксиомы 1-11: аксиомы исчисления высказываний.

Аксиома 12: $\forall x\, \phi \to \phi(t/x)$, где t/x — это корректная подстановка терм t в ϕ вместо свободных вхождений x.

Здесь могут возникнуть проблемы при неверной замене. Например:

$$\forall x\ \exists y \quad x < y \ \to\ \exists y \quad y < y,$$

что неверно из-за некорректной подстановки.

Корректная подстановка означает, что терм t не содержит переменных, по которым стоят кванторы в ϕ. Это не является формальным определением, так как формальное определение корректной подстановки происходит по индукции. С ним можно ознакомиться в книге *Шеня*.

Аксиома 13: $\phi(t/x) \to \exists x\, \phi$.

Из данных аксиом уже можно получить формулу:

$$\forall x\, \phi \ \to\ \exists x\, \phi.$$

Вывод этой формулы выглядит так:

1. $\forall x\, \phi \to \phi$ (аксиома 12);

2. $\phi \to \exists x\, \phi$ (аксиома 13);

3. По аксиомам исчисления высказываний: $\forall x\, \phi \to \exists x\, \phi$ (силлогизм).

Однако, аксиомы охватывают не все аспекты кванторов.

2. Правила вывода

Имеются следующие **правила вывода**:

1. *Modus ponens*, то есть:
$$\frac{A,\ A \to B}{B};$$

2. *Первое правило Бернайса*:
$$\frac{\phi \to \psi}{\exists x\, \phi \to \psi};$$

3. *Второе правило Бернайса*:
$$\frac{\psi \to \phi}{\psi \to \forall x\, \phi}.$$

Для правил Бернайса важно следующее ограничение: x не является параметром ψ.

Определение 57: Выводом *называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получается по одному из правил вывода.* ♣

Пример 43 Имеется формула:

$$\exists x\ \forall y\, \phi \ \to\ \forall y\ \exists x\, \phi.$$

Продемонстрируем ее вывод:

1. $\forall y\ \phi \to \phi$ (аксиома 12);
2. $\phi \to \exists x\, \phi$ (аксиома 13);
3. $\forall y\, \phi \to \exists x\, \phi$ (силлогизм);
4. $\exists x\ \forall y\, \phi \to \exists x\, \phi$ (первое правило Бернайса);
5. $\exists x\ \forall y\, \phi \to \forall y\ \exists x\, \phi$ (второе правило Бернайса). $*$

Пример 44 *Обобщенный закон де Моргана:*

$$\neg\forall x\, \phi \ \longleftrightarrow\ \exists x\, \neg\phi, \quad \neg\exists x\, \phi \ \longleftrightarrow\ \forall x\, \neg\phi.$$

Докажем одну из формул:
$$\forall x\, \phi \ \to\ \phi.$$

Если взять контрапозицию, то получится:

$$\neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi.$$

Воспользуемся правилом Бернайса:

$$\exists x\, \neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi.$$

Преобразуя следующим образом:

$$\forall x \neg\phi \;\to\; \neg\phi,$$

получим:

$$\phi \;\to\; \neg\forall x \neg\phi.$$

По правилу Бернайса:

$$\exists x\, \phi \;\to\; \neg\forall x \neg\phi.$$

Контрапозиция:

$$\forall x \neg\phi \;\to\; \neg\exists x\, \phi.$$

В другую сторону:

$$\phi \;\to\; \exists x\, \phi.$$

Контрапозиция:

$$\neg\exists x\, \phi \;\to\; \neg\phi.$$

По правилу Бернайса:

$$\neg\exists x\, \phi \;\to\; \forall x \neg\phi.$$

Пример 45 Существует также взаимодействие кванторов с логическими операциями:

$$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\longleftrightarrow\; \Big(\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi\Big).$$

Выведем:

$$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\to\; \phi \wedge \psi; \quad \forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\to\; \phi.$$

Тогда:

$$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\to\; \forall x\, \phi.$$

Далее запишем:

$$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\to\; \forall x\, \psi.$$

В итоге получаем:

$$\forall x\, (\phi \wedge \psi) \;\to\; \Big(\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi\Big),$$

что и требовалось вывести.

В другую сторону вывод аналогичен:

$$\forall x\, \phi \;\to\; \phi; \quad \forall x\, \psi \;\to\; \psi,$$

тогда пропозициональная комбинация:

$$\Big(\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi\Big) \;\to\; (\phi \wedge \psi).$$

Итак, получаем искомый результат:

$$\Big(\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi\Big) \;\to\; \forall x\, (\phi \wedge \psi).$$

Имеется еще одно удобное правило:

Теорема 16 (Правило обобщения (generalization)) Если выводимо ϕ, то выводимо $\forall x\,\phi$, то есть:

$$\frac{\phi}{\forall x\,\phi}.$$

Замечание $\phi \to \forall x\,\phi$ не является общезначимой формулой. *

Докажем правило обобщения:

Док-во: Сначала в результате некоего вывода получаем ϕ. Используя первую аксиому получим:

$$\phi \ \to \ (\psi \to \phi),$$

в качестве ψ возьмем аксиому из первых одиннадцати, и ψ не зависит от x. Тогда $\psi \to \phi$ (modus ponens).

По второму правилу Бернайса:

$$\psi \ \to \ \forall x\,\phi.$$

Воспользовавшись тем, что ψ — это аксиома, получим $\forall x\,\phi$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 17 (О корректности) Если ϕ — выводима, то она — общезначима. *

Доказательство теоремы о корректности следует из того, что все аксиомы — общезначимы. Правила вывода преобразуют общезначимые в общезначимые.

Рассмотрим на примере аксиомы:

$$\forall x\,\phi \ \to \ \phi(t/x).$$

Пусть $\forall x\,\phi$ верно в некоторой интерпретации при некоторой оценке π. Тогда ϕ верна в той же интерпретации при любой оценке π', совпадающей с π всюду, кроме x (так оценивалась истинность формулы с квантором).

В частности, в оценке, при которой:

$$\pi'(x) = [t](\pi),$$

можно записать:

$$\Big[\phi(t/x)\Big](\pi) = [\phi](\pi').$$

3. Корректность правила Бернайса

Будем рассматривать:

$$\frac{\phi \to \psi}{\exists x\,\phi \to \psi},$$

причем ψ не зависит от x.

Пусть $\phi \to \psi$ истинно при любой интерпретации на любой оценке.

Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π. Тогда значение формулы ψ на этой оценке:

$$[\psi](\pi) = \left[\begin{array}{l} 1; \\ 0. \end{array}\right.$$

В первом случае получается, что $\exists x\, \phi \to \psi$ — истинно.

Во втором случае, так как $\phi \to \psi$ — истинно на любой π', совпадающей с π всюду, кроме x, то ϕ — ложна на любой такой π'. Тогда $\exists x\, \phi$ — ложно на π, следовательно, $\exists x\, \phi \to \psi$ — истинно на π.

4. Лемма о дедукции

Про выводимость из посылок нужно заметить, что посылки — только замкнутые формулы. Тогда вывод из множества посылок Γ — это последовательность формул, каждая из которых является либо аксиомой, либо элементом Γ, либо получается по одному из правил вывода.

Лемма 6 (О дедукции) Если Γ — множество замнкутых формул, и A — тоже замкнутая формула, то:

$$\Gamma \vdash A \to B \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \cup \{A\} \vdash B.$$

Док-во: Первая часть ($\Rightarrow$): аналогично с доказательством в исчислении высказываний, запишем:

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A, \quad A \to B \vdash B.$$

Вторая часть ($\Leftarrow$): по индукции доказывается, что:

$$\Gamma \vdash A \to C_i.$$

Если C_i — это аксиома, или элемент Γ, или A, или получено по modus ponens, то доказательство в точности повторяет аналогичное из исчисления высказываний.

Тогда остается два случая — правила Бернайса.

Первый случай заключается в том, что:

$$C_i = \exists x\, \phi \to \psi, \quad j < i, \quad C_j = \phi \to \psi.$$

Тогда по предположению индукции:

$$\Gamma \vdash A \ \to \ (\phi \to \psi).$$

Имеет место пропозициональная эквивалентность:

$$\Gamma \vdash \phi \ \to \ (A \to \psi).$$

Используя тот факт, что A — замкнутая, а ψ не содержит x, приходим к выводу, что $(A \to \psi)$ — не зависит от x.

Тогда по правилу Бернайса:

$$\Gamma \vdash \exists x\, \phi \ \to \ (A \to \psi).$$

Следовательно:

$$\Gamma \vdash A \;\to\; \Big(\exists x\, \phi \to \psi\Big).$$

Второй случай выглядит следующим образом:

$$C_i = \psi \to \forall x\, \phi, \quad j < i, \quad C_j = \psi \to \phi.$$

По предположению индукции:

$$\Gamma \vdash A \;\to\; (\psi \to \phi),$$

следовательно:

$$\Gamma \vdash (A \wedge \psi) \;\to\; \phi.$$

Так как A — замкнутая, а ψ не зависит от x, то по правилу Бернайса:

$$\Gamma \vdash (A \wedge \psi) \;\to\; \forall x\, \phi.$$

Тогда:

$$\Gamma \vdash A \;\to\; \Big(\phi \to \forall x\, \phi\Big).$$

Лемма доказана. ■

Следствия: $\Gamma \vdash \phi$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \subset \Gamma$ выводится:

$$(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \;\to\; \phi.$$

Идея доказательства следствия 4 — применив много раз лемму о дедукции, получить в итоге:

$$\gamma_1 \to \Big(\gamma_2 \to (\gamma_3 \to \ldots \to (\gamma_n \to \phi))\Big).$$