ЛЕКЦИЯ 15

НЕСТАНДАРТНЫЕ МОДЕЛИ АРИФМЕТИКИ. НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

1. Нестандартные модели арифметики

Рассмотрим арифметику — носителем является множество натуральных чисел N. Предикат любой валентности в таком случае:

$$P \subset N^k \mapsto \text{ соответствующий предикатный символ.}$$

С помощью описанных символов можно записать все арифметические истины.

Пусть теория S — множество всех замкнутых формул первого порядка, истинных в стандартной модели. Следовательно, по теореме о повышении мощности, у такой теории есть модель сколь угодно больших мощностей.

Возьмем Ω — новый константный символ. Рассмотрим:

$$S \cup \{\Omega > 0,\ \Omega > 1,\ \Omega > 2,\ \Omega > 3, \dots\}.$$

Это — тоже теория, и к ней также применима теорема о компактности. У такой теории любая конечная подтеория — совместна.

Из теоремы о компактности следует, что у данной теории существует модель, то есть вся теория — совместна. Эта модель арифметики уже не может быть стандартной. Значит, она должна заключать в себе стандартную модель.

Введем обозначение ${}^*N$ — это носитель новой модели, а ее элементы будем называть *гипернатуральными числами*. Будем изучать такую модель. Заметим, что здесь Ω — это «бесконечно большое число».

Здесь существует операция прибавления единицы ($s(x) = x + 1$). Значит, функция всюду определена. Тогда применим ее к Ω:

$$s(\Omega) = \Omega + 1 > \Omega.$$

Отношение порядка:

$$\forall x\ Neg\exists y \quad x < y < x + 1.$$

Можно также записать:

$$s(\Omega + 1) = \Omega + 2, \quad s(\Omega + 2) = \Omega + 3, \quad \dots .$$

Так будет построено счетное количество, которое, с точки зрения порядка, образует внутри себя натуральный ряд. Также из любого числа, кроме нуля, можно вычесть единицу:

$$\forall x \Big(xNe0 \to \exists y\ s(y) = x\Big).$$

Обозначим также:

$$\Omega = s(\Omega - 1).$$

Если считать, что вычитание — это частично определенная функция, то это будет не только обозначение, но и содержательное утверждение.

Аналогично:

$$\Omega - 1 = s(\Omega - 2), \quad \dots .$$

С точки зрения порядка получим некий аналог целых чисел. Более того, такие утверждения можно провести не только с Ω, но и с любыми нестандартным числом.

Заметим, что любое нестандартное число должно быть больше любого стандартного.

Утверждение 7 Любой нестандартный элемент гипернатуральных чисел больше любого стандартного. $*$

Док-во: Это утверждение верно, исходя из наличия формул следующего вида:

$$\forall x \Big(x \leqslant 10 \to (x = 0 \vee x = 1 \vee \dots \vee x = 10)\Big).$$

Это — замкнутая формула, а значит, она должна сохраняться в гипернатуральных числах. Таким образом, дальнейшими элементарными рассуждениями можно получить исходное утверждение. ■

Определение 65: *С любым нестандартным числом x связано множество следующего вида:*

$$\{\dots,\ x - 2,\ x - 1,\ x,\ x + 1,\ x + 2, \dots\}.$$

Такое множество называется ***галактикой****.* ♣

Обозначим операцию $d(x) = 2 \cdot x$. Такой операции должна соответствовать какая-либо гипернатуральная операция.

В связи с этим возникает вопрос — могут ли Ω и $d(\Omega)$ лежать в одной галактике?

Известна следующая формула:

$$\forall x \quad \big|x - d(x)\big| = x.$$

В частности, эта формула верна для Ω. Значит:

$$\big|\Omega - d(\Omega)\big| = \Omega,$$

а Ω — нестандартное число, что означает, что Ω и $d(\Omega)$ лежат в разных галактиках.

Более того, можно доказать, что на галактики распространяется порядок.

Утверждение 8 Если G и H — две различные галактики, и для некоторых $x_0 \in G$ и $y_0 \in H$ таких, что $x_0 < y_0$, верно следующее:

$$\forall x \in G \ \forall y \in H \quad x < y.$$

Док-во: Пусть:

$$x_0 + a \geqslant y_0 + b.$$

Тогда можно записать:

$$-x_0 + y_0 > 0, \quad x_0 - y_0 - b + a \geqslant 0.$$

Соответственно, в стандартной модели для x_0 и y_0 можно записать формулу, верную и в гипернатуральных числах.

Рассуждения приводят к противоречию по причине того, что x_0 и y_0 лежат в различных галактиках. Таким образом, доказано, что на галактиках задан порядок. ■

Утверждается также, что порядок на галактиках — плотный.

Обозначим:

$$d_\alpha(x) = [\alpha x],$$

где α — параметр.

Утверждение 9 Если $\alpha < \beta$, то тогда $d_{\alpha(\Omega)}$ и $d_\beta(\Omega)$ находятся в разных галактиках. ∗

Док-во: По крайней мере для достаточно больших N:

$$\exists N \ \forall x > N \quad d_\beta(x) - d_\alpha(x) > d_{\frac{\beta-\alpha}{2}}(x).$$

Если вместо N поставить не переменную, а константу, то это будет верной формулой. Также это будет верной формулой и для Ω.

Обозначим:

$$c_\alpha(x, y) = [\alpha x + (1 - \alpha) y].$$

Применив полученную формулу, приходим к выводу, что порядок на галактиках является плотным. ■