ЛЕКЦИЯ 3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СЛАУ

Вспомним основные результаты, полученные на предыдущей лекции.

1. Норма вектора

$$||u||_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{N} |u_j|^p}$$

Были введены следующие нормы вектора:

1. **Октаэдрическая норма:**

$$||u||_1 = \max_j |u_j|, \quad \text{где } p = \infty.$$

2. **Кубическая норма:**

$$||u||_2 = \sum_{j=1}^{N} |u_j|, \quad \text{где } p = 1.$$

3. **Евклидова норма:**

$$||u||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2}, \quad \text{где } p = 2.$$

2. Норма матрицы

При введении векторной нормы можно соответствующим образом ввести матричную норму.

Подчиненная или **операторная норма матрицы**:

$$||A|| = \sup_{|u| \neq 0} \frac{||Au||}{|u|}.$$

Для каждой нормы вектора определяется соответствующая норма матрицы:

1. **Первая норма:**
$$||A||_1 = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

2. **Вторая норма:**
$$||A||_2 = \max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|.$$

3. **Третья норма:**
$$||A||_3 = \sqrt{\max_j |\lambda_j\left(A^*A\right)|}.$$

Нормы позволяют оценить влияние погрешностей правой части и коэффициентов матрицы на решение системы линейных алгебраических уравнений.

3. Решение СЛАУ

Пусть задана система:
$$A\,u = f,$$
где A — матрица коэффициентов, u и f — вектора. Пусть f и A заданы с некоторой точностью:
$$f = f + \Delta f,$$
$$A = A + \Delta A.$$

Возникает вопрос, с какой точностью известно решение системы. Введем число обусловленности системы:
$$\mu = ||A^{-1}||\,||A||.$$

При этом норма, используемая для оценки решения, и матричная норма должны быть согласованы.

Теорема 2 Пусть при решении СЛАУ
$$A\,u = f, \quad \det\{A\} \neq 0,$$
выполняется:
$$\mu\frac{||\Delta A||}{||A||} < 1.$$

Тогда возмущение системы подчиняется неравенству:
$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \frac{\mu}{1 - \mu\dfrac{||\Delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\Delta f||}{||f||} + \frac{||\Delta A||}{||A||}\right).$$

Док-во: Пусть исходная система:

$$A\,u = f.$$

Тогда возмущенная система:

$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = f + \Delta f.$$

Распишем возмущенную систему следующим образом:

$$A\,u + \Delta A\,u + A\,\Delta u + \Delta A\,\Delta u = f + \Delta f.$$

Используя соотношение

$$A\,u = f,$$

получим:

$$A\,\Delta u = \Delta f - \Delta A\,u - \Delta A\,\Delta u,$$

$$\Delta u = A^{-1}(\Delta f - \Delta A\,u - \Delta A\,\Delta u).$$

Применим неравенство треугольника:

$$||\Delta u|| \leqslant ||A^{-1}\,\Delta f|| + ||A^{-1}\,\Delta A\,u|| + ||A^{-1}\,\Delta A\,\Delta u||.$$

Т. к. норма матрицы подчинена норме вектора, то эти нормы являются согласованными. Тогда получим следующее неравенство:

$$||\Delta u|| \leqslant ||A^{-1}||\,||\Delta f|| + ||A^{-1}||\,||\Delta A||\,||u|| + ||A^{-1}||\,||\Delta A||\,||\Delta u||.$$

Умножим и разделим каждое слагаемое на норму матрицы $||A||$.

$$||\Delta u|| \leqslant ||A^{-1}||\,||A||\frac{||\Delta f||}{||A||} + ||A^{-1}||\,||A||\frac{||\Delta A||}{||A||}\,||u|| + ||A^{-1}||\,||A||\frac{||\Delta A||}{||A||}\,||\Delta u||.$$

Введем замену $\mu = ||A||\,||A^{-}1||$ и разделим на неотрицательную величину $||u||$.

$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \mu\frac{||\Delta f||}{||A||\,||u||} + \mu\frac{||\Delta A||}{||A||} + \mu\frac{||\Delta A||}{||A||}\,\frac{||\Delta u||}{||u||},$$

$$\frac{||\Delta u||}{||u||}\left(1 - \mu\frac{||\Delta A||}{||A||}\right) \leqslant \mu\left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta f||}{||A||\,||u||}\right).$$

Из равенства $A\,u = f$ получим, что $||A\,u|| = ||f||$. Т. к. норма согласована, то $||f|| \leqslant ||A||\,||u||$. Тогда получим:

$$\frac{||\Delta u||}{||u||}\left(1 - \mu\frac{||\Delta A||}{||A||}\right) \leqslant \mu\left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta f||}{||f||}\right).$$

По условию теоремы:

$$\mu\frac{||\Delta A||}{||A||} < 1.$$

Разделим неравенство на положительный коэффициент:

$$1 - \mu\frac{||\Delta A||}{||A||}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \frac{\mu}{1-\mu\dfrac{||\Delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\Delta f||}{||f||}+\frac{||\Delta A||}{||A||}\right).$$

Пример 6

$$\begin{cases} 100u + 99v = 199, \\ 99u + 98v = 197. \end{cases}$$

Точным решением системы будут величины $u = 1, v = 1$. Рассмотрим возмущение правой части, равное 0,01.

$$\begin{cases} 100u + 99v = 198{,}99, \\ 99u + 98v = 197{,}01. \end{cases}$$

В этом случае точным решением будут значения $u = 2{,}97, v = -0{,}99$. Значения изменились существенно.

В данном примере $||A|| = 0$.

$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \mu\frac{||\Delta f||}{||f||}.$$

Проверим, выполнено ли это неравенство. Рассмотрим первую векторную норму. Тогда получим:

$$||u||_1 = 1, \quad ||\Delta u||_1 = \max(|2{,}97-1|, |-0{,}99-1]) = 1{,}99,$$

$$||\Delta f||_1 = 0{,}01, \quad ||f||_1 = 199.$$

Вычислим число обусловленности.

$$||A||_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 98 & -99 \\ -99 & 100 \end{pmatrix} = \frac{1}{100\cdot 99 - 99^2}\begin{pmatrix} 98 & -99 \\ -99 & 100 \end{pmatrix}.$$

$$||A^{-1}||_1 = \max(99+98, 99+100) = 199.$$

Отсюда следует, что $\mu = 199^2$. Проверим выполняется ли условие

$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \mu\frac{||\Delta f||}{||f||}.$$

$$\frac{1{,}99}{1} = 199^2\frac{0{,}01}{199}.$$

Легко видеть, что неравенство превратилось в равенство. Данный пример показывает, что верхняя оценка достижима.

Однако при других возмущениях правой части равенство может и не достигаться. Возникает вопрос, в каких пределах может меняться чувствительности на возмущение правой части.

Рассмотрим систему

$$Au = f.$$

Пусть оценка возмущений зависит от f и Δf. Тогда будет справедливо неравенство:

$$\frac{||\Delta u||}{||u||} \leqslant \nu(A, f)\frac{||\Delta f||}{||f||}.$$

Можно показать, что $1 \leqslant \nu(A, f) \leqslant \mu$, т. е. худшая из возможных оценок равна μ.

Свойства числа обусловленности

1. При условии $||u|| = 1$ выполняется:

$$\mu = \frac{\sup ||Au||}{\inf ||Au||}.$$

2.

$$\mu \geqslant \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|}.$$

Равенство имеет место для евклидовой нормы и самосопряженной матрицы $A = A^*$.

3. $\mu \geqslant 1$, причем $\mu = 1$ для матриц вращения.

4. $\mu(AB) \leqslant \mu(A)\mu(B)$.

Рассмотрим систему следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица имеет диагональный вид. В этом случае ее собственные значения равны диагональным элементам.

$$\mu = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{10^{12}}{1} = 10^{12}.$$

Воспользовавшись свойством 4 и домножив исходную матрицу A на обратную A^{-1}, получим единичную матрицу. В этом случае проблем с числом обусловленности не будет.

4. Методы решения СЛАУ

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на два класса:

1. Прямые

- правило Крамера
- нахождение обратной матрицы
- метод Гаусса

2. Итерационные
- метод Якоби
- метод Гаусса – Зейделя
- ПВР (последовательной верхней релаксации)
- метод градиентного спуска

4.1. Прямые методы решения СЛАУ

1) Правило Крамера

Для вычисления решения $u_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ по правилу Крамера требуется вычислить $n+1$ определитель. Вычисление каждого определителя выполняется за $n!$ операций. Допустим, что одна операция выполняется за 10^{-6} сек. Тогда при $n = 30$ время вычисления составит $t = 10^{18}$ лет. Поэтому правило Крамера эффективно использовать для матриц 2 и 3 порядка.

2) Поиск обратной матрицы

Пусть задана система уравнений

$$Au = f.$$

Тога решением такой системы будет вектор u, равный

$$u = A^{-1}f.$$

Однако такой метод не всегда удобен. Пусть требуется решить уравнение

$$7x = 21.$$

Воспользовавшись методом поиска обратной матрицы, получим:

$$x = 7^{-1} \cdot 21 \approx 0{,}142857 \cdot 21 = 2{,}99997.$$

Метод Гаусса для аналогичного примера дает результат $x = \frac{21}{7} = 3$.

Метод обратной матрицы требует вычисления двух операций: деление и умножение. К тому же приводит к менее точному результату, чем метод Гаусса.

5. Метод Гаусса

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases}$$

Метод Гаусса состоит их двух частей.

1) Прямой ход метода Гаусса

При прямом ходе метода Гаусса матрицу приводят к верхнетреугольному виду. Для этого из второго уравнения вычитают первое, умноженное на коэффициент $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ $(II - I\dfrac{a_{21}}{a_{11}})$. Аналогично и с другими уравнениями системы. В итоге получим, что все коэффициенты при x_1 кроме первого будут равны нулю. Получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad\quad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)}. \end{cases}$$

Из третьего уравнения вычтем второе, домноженное на коэффициент $\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ $(III - II\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}})$. Аналогично поступим и с другими уравнениями. Получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = f_2^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = f_n^{(2)}. \end{cases}$$

Занулим элементы всех оставшихся столбцов. Окончательно получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = f_2^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(2)}x_n = f_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Чтобы занулить элементы первого столбца требуется $2n^2$ операций. Чтобы занулить элементы второго столбца требуется $2(n-1)^2$ операций, и т. д. Всего потребуется операций:

$$2n^2 + 2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + \dots \approx \frac{2}{3}n^3.$$

1) Обратный ход метода Гаусса

После выполненных преобразований система обладает верхнетреугольной матрицей. В этом случае решение может быть получено явным образом: путем подставления решения последнего уравнения в предпоследнее и т. д. Зная значение x_n, можно легко найти значение x_{n-1}. Зная значения x_n и x_{n-1}, можно найти значение x_{n-2} и т. д.

Обратный ход метода Гаусса требует всего $\sim 2n^2$ операций. Для больших матриц выполняется гораздо быстрее, чем прямой ход. Можно показать, что метод Гаусса для невырожденных матриц эквивалентен LU-разложению.

Пусть матрица A представима в следующем виде:

$$A = LU, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда произведение матриц равно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При перемножении матриц получим:

$$\begin{cases} d_{11} \cdot 1 = a_{11}, \\ d_{12} \cdot 1 = a_{12}, \\ \dots\dots\dots \\ d_{1n} \cdot 1 = a_{1n}, \end{cases}, \quad \begin{cases} l_{21} d_{11} = a_{21}, \\ l_{21} d_{12} + d_{22} = a_{22}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_{21} d_{1n} + d_{2n} = a_{2n}, \end{cases}, \quad \dots \quad \begin{cases} l_{n1} d_{11} = a_{n1}, \\ l_{n1} d_{12} + l_{n2} d_{22} = a_{22}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

Для решения такой системы из n^2 уравнений существует прямой метод. Сначала решается первая система, из которой находятся значения $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}$. Зная эти коэффициенты, легко найти значения $l_{21}, l_{31}, \dots, l_{n1}$. Далее находятся коэффициенты $d_{22}, \dots, d_{2n}$ и $l_{32}, l_{42}, \dots, l_{n2}$ и т. д. Такой алгоритм довольно прост. Окончательное решение имеет вид:

$$\begin{cases} d_{1j} = a_{1j} \quad j = 1 \dots n, \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{d_{11}}, \quad i = 1 \dots n, \\ d_{2j} = a_{2j} - l_{2j} d_{1j}, \quad j = 2 \dots n, \\ l_{i2} = \dfrac{(a_{i2} - l_{i1} d_{12})}{d_{22}}, \quad i = 2 \dots n, \\ d_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kj}, \quad i \leqslant j, \\ l_{ij} = d_{ij}^{-1} (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kj}), \quad i > j. \end{cases}$$

При использовании метода Гаусса выполняется операция деления на диагональный элемент. Возникает вопрос, что следует делать, если значение диагонального элемента близко к нулю, и когда метод Гаусса является устойчивым.

Теорема 3 (без доказательства) При условии диагонального преобладания

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

метод Гаусса является устойчивым. *

Существуют примеры, когда условие теоремы не выполняется. В этом случае используют модифицированный метод Гаусса.

5.1. Метод Гаусса с выбором ведущего (главного) элемента

Существует несколько модификаций метода Гаусса:

1. **Выбор главного элемента в строке**.

   Выберем в первой строке наибольший элемент и поменяем местами столбцы с первым элементом и максимальным. На первом этапе будем решать такую систему. В модифицированном втором уравнении поступим так же — поменяем местами столбцы со вторым элементом и максимальным и т. д.

2. **Выбор главного элемента в столбце**.

   Идея метода такая же, как и в первом случае, только местами меняются не столбцы, а строки.

3. **Выбор главного элемента по всей матрице**.

   Такой алгоритм требует достаточно много ресурсов и реализуется очень редко.

Пример 7

$$\begin{cases} 10^{-3}u_1 + u_2 = 2, \\ u_1 - u_2 = 1. \end{cases}$$

Будем работать с точностью до двух десятичных знаков. В точной математике получим:

$$\begin{cases} u_1 + 10^3 u_2 = 2 \cdot 10^3, \\ u_1 - u_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 10^3 u_2 = 2 \cdot 10^3, \\ -(1 + 10^3)u_2 = 1 - 2 \cdot 10^3. \end{cases}$$

В арифметике с точностью до двух знаков значение 1 не учитывается по сравнению с величиной 10^3. В вычислительной математике получим:

$$\begin{cases} u_1 + 10^3 u_2 = 2 \cdot 10^3, \\ -10^3 u_2 = -2 \cdot 10^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 2. \end{cases}$$

Воспользуемся методом Гаусса с выбором главного элемента по строке.

$$\begin{cases} 10^{-3}u_1 + u_2 = 2, \\ u_1 - u_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 + 10^{-3}u_1 = 2, \\ -u_2 + u_1 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 + 10^{-3}u_1 = 2, \\ (1 + 10^{-3})u_1 = 1 + 2. \end{cases} \Rightarrow$$

В арифметике с точностью до двух знаков значение 10^{-3} не учитывается по сравнению с величиной 1. Решением такой системы будут значения

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_2 = 2. \end{cases}$$