

---

---

## ЛЕКЦИЯ 4

---

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Для того чтобы уменьшить погрешность, связанную с округлением, прибегают к следующему алгоритму.

Пусть  $u^*$  — точное решение системы,  $u$  — численное решение. Тогда введем **невязку решения**:

$$r = Au - f.$$

Метод Гаусса гарантирует, что значение  $\|r\|$  будет мало. Однако, в силу плохой обусловленности задачи, решение  $u$  может быть довольно далеко от  $u^*$ . Для уточнения решения воспользуемся следующим алгоритмом.

Пусть  $e = u^* - u$  — погрешность решения.

$$\begin{cases} Au = f + r, \\ Au^* = f. \end{cases} \Rightarrow A(u^* - u) = r.$$

Такое уравнение можно решать в следующем виде:

$$\begin{cases} Ae = r, \\ e = u^* - u. \end{cases}$$

Применим к этой системе метод Гаусса. Тогда уточненное решение будет иметь вид:

$$\tilde{u} = u + e.$$

Можно снова вычислять значение невязки, подставлять в уравнение и повторять весь алгоритм до тех пор, пока не будет достигнут достаточный уровень точности.

Метод Гаусса требует порядка  $\frac{2}{3}n^3$  операций прямого хода и  $2n^2$  операций обратного хода. Для решения больших систем метод Гаусса совершенно неприменим. Поэтому очень часто используют итерационные методы решения СЛАУ.



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

## 1. Метод простой итерации (МПИ)

Будем рассматривать метод простой итерации в широком и узком смыслах. В широком смысле метод простой итерации означает следующее: пусть систему уравнений

$$A\vec{x} = \vec{f}$$

удалось преобразовать к следующему виду:

$$\vec{x} = R\vec{x} + \vec{F},$$

где  $R$  — матрица перехода.

Для такого преобразования всегда можно устроить итерационный процесс вида:

$$\vec{x}^{(s+1)} = R\vec{x}^{(s)} + \vec{F}.$$

Это и есть МПИ в широком смысле. Если последовательность векторов  $\{\vec{x}^{(s)}\} \rightarrow \vec{x}^*$  при  $s \rightarrow \infty$ , то говорят, что МПИ сходится.

**Теорема 4** Пусть норма матрицы  $R$  подчинена какой-либо норме вектора. Тогда, если:

$$\|R\| \leq q < 1,$$

то МПИ является сходящимся.

\*

**Док-во:** Рассмотрим итерационный процесс:

$$\vec{x}^{(s+1)} = R\vec{x}^{(s)} + \vec{F}.$$

Для точного решения системы выполняется соотношение:

$$\vec{x}^* = R\vec{x}^* + \vec{F},$$

Тогда для погрешности решения  $\delta$  получим:

$$\vec{\delta}^{(s)} = \vec{x}^{(s)} - \vec{x}^*,$$

$$\vec{\delta}^{(s+1)} = R\vec{\delta}^{(s)}.$$

Вспомним, что норма матрицы подчинена векторной норме. Тогда получим:

$$\|\vec{\delta}^{(s+1)}\| = \|R\vec{\delta}^{(s)}\| \leq \|R\| \|\vec{\delta}^{(s)}\| \leq q \|\vec{\delta}^{(s)}\|.$$

Повторяя процесс, получим:

$$\|\vec{\delta}^{(s+1)}\| \leq q^2 \|\vec{\delta}^{(s-1)}\| \leq \dots q^{(s+1)} \|\vec{\delta}^0\|.$$

Отсюда видно, что  $\|\vec{\delta}^{(s)}\| \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Такой подход позволяет оценить количество операций, необходимых для достижения



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

заданной точности. Пусть решение, полученное на  $k$ -ой операции, отличается от точного решения не более чем на  $\epsilon$ .

$$\|u^k - u^*\| \leq \epsilon.$$

Тогда:

$$\|u^k - u^*\| \leq q^k \|\delta^0\| \leq \epsilon,$$

$$q^k \leq \frac{\epsilon}{\|\delta^0\|} \Rightarrow k \ln q \leq \ln \frac{\epsilon}{\|\delta^0\|}.$$

Т. к.  $q < 1$ , то  $\ln q < 0$  и при делении на  $\ln q$  знак неравенства изменится. Тогда получим:

$$k \geq \frac{\ln \epsilon / \|\delta^0\|}{\ln q}.$$

Однако, во многих реальных задачах вычисление значения  $q$  очень сложное. К тому же не всегда заранее известна необходимая точность  $\delta^0$ .

**Определение 11:** *Спектральным радиусом матрицы  $R$  называется величина:*

$$\rho(R) = \max_i |\lambda_i(R)|.$$

**Теорема 5 (Без доказательства)** Для сходимости МПИ в широком смысле необходимо и достаточно:

$$\rho(R) < 1.$$

Чаще всего МПИ рассматривают в узком смысле. Пусть исходная система задается уравнением:

$$Ax = f.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \tau Ax &= \tau f, \\ x + \tau Ax &= x + \tau f, \\ x &= \underbrace{(E - \tau A)}_R x + \underbrace{\tau f}_F. \end{aligned}$$

Данный метод перехода к уравнению в виде МПИ в широком смысле называется МПИ в узком смысле. Такой метод может быть применим всегда. Тогда получим итерационный процесс вида:

$$\vec{x}^{(s+1)} = R\vec{x}^{(s)} + \vec{F}.$$

**Канонический вид записи двухслойных итерационных методов:**

$$B_k \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f.$$

МПИ соответствует случаю, когда  $\forall k B_k = 1, \tau_k = \tau$ . Если  $\tau_k = 1$ , то метод называют **МПИ без параметра**. Если  $B_k = E$ , то МПИ называют **явным**.

Основное требование при использовании МПИ — это обратимость матрицы  $B$  за ма-

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

лое число итераций. Это возможно, если  $B$  диагональная, верхне- или нижнетреугольная матрица. Такие матрицы обрабатываются за  $n^2$  операций.

Рассмотрим МПИ в узком смысле. Найдем значения параметра  $\tau$ , при котором метод является сходящимся. Пусть матрица  $A$  обладает полным набором собственных значений и векторов  $\{\lambda_i, \vec{e}\}$ . Потребуем, чтобы матрица  $A$  была самосопряженной и положительно определенной, т. е.  $A = A^* > 0$ . Тогда, если выполняется соотношение:

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B,$$

то

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

где  $\tau_{\text{опт}}$  — значение  $\tau$ , при котором метод сходится быстрее всего.

Метод сходится, если:

$$\tau \leq \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

Если  $B = E$ , то выполняется:

$$\lambda_{\min} E \leq A \leq \lambda_{\max} E.$$

Тогда:

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

Результат справедлив в случае, если матрица не является самосопряженной, но все собственные значения положительные. Если спектр значений действительный, но существует собственное значение меньше нуля, то для того чтобы использовать МПИ применяется процедура **симметризации Гаусса**.

$$Ax = f,$$

$$A^* Ax = A^* f,$$

$$(A^* A)^* = A^* A > 0.$$

Тогда можно применять МПИ в узком смысле.

## 2. Метод Якоби – Гаусса

Запишем систему уравнений в координатном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases}$$

Из первого уравнения будем находить новые приближения для  $x_1$  используя  $x_2, \dots, x_n$ , полученные на предыдущих итерациях. Из второго уравнения будем находить новые

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

приближения для  $x_2$ , оставляя старые значения для всех остальных переменных. Тогда получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(s+1)} + a_{12}x_2^{(s)} + \dots + a_{1n}x_n^{(s)} = f_1, \\ a_{21}x_1^{(s)} + a_{22}x_2^{(s+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(s)} = f_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1^{(s)} + a_{n2}x_2^{(s)} + \dots + a_{nn}x_n^{(s+1)} = f_n. \end{cases}$$

Решение будет записываться в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = \frac{1}{a_{11}}(f_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(s)}), \\ x_i^{(s+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(s)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(s)}). \end{cases}$$

Запишем все операции в матричном виде. Представим матрицу  $A$  следующим образом:

$$A = L + D + U,$$
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_U.$$

Матрица  $D$  — диагональная, матрицы  $L$  и  $U$  — ниже- и верхнетреугольные соответственно.

Тогда получим:

$$Lx^{(s)} + Dx^{(s+1)} + Ux^{(s)} = f,$$
$$Dx^{(s+1)} = -(L + U)x^{(s)} + f,$$
$$x^{(s+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_R x^{(s)} + D^{-1}f.$$

Получим МПИ с другой матрицей перехода  $R$ .

**Теорема 6** Метод Якоби – Гаусса сходится тогда и только тогда, когда все значения  $\lambda_i$ , определяемые уравнением

$$\det \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

по модулю меньше единицы.

$$\forall i \quad |\lambda_i| < 1.$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!**

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.  
Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

**Док-во:** Рассмотрим матрицу перехода:

$$R = -D^{-1}(L + U).$$

По теореме о необходимом и достаточном условии сходимости МПИ в широком смысле метод сходится в том случае, если

$$\rho(R) < 1.$$

Вычислим спектральный радиус  $R$ . Для этого найдем собственные значения матрицы  $R$ .

$$\begin{aligned} R\vec{e} &= \lambda\vec{e} \Leftrightarrow \det(R - \lambda E) = 0, \\ \det(R - \lambda E) &= \det(-D^{-1}(L + U) - \lambda E) = \\ \det(-D^{-1}[(L + U) + \lambda D]) &= \det(-D^{-1}) \det(L + U + \lambda D) = 0, \\ \det(L + U + \lambda D) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если все значения  $\lambda_i$ , определяемые уравнением  $\det(L + U + \lambda D) = 0$  по модулю меньше единицы, то  $\forall i \quad |\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \rho(R) < 1$ .

### 3. Метод Гаусса–Зейделя

Метод очень похож на метод Якоби–Гаусса, однако в методе Гаусса–Зейделя учитываются компоненты решения, вычисленные ранее.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(s+1)} + a_{12}x_2^{(s)} + \dots + a_{1n}x_n^{(s)} = f_1, \\ a_{21}x_1^{(s+1)} + a_{22}x_2^{(s+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(s)} = f_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1^{(s+1)} + a_{n2}x_2^{(s+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(s+1)} = f_n. \end{cases}$$

Решение будет записываться в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = \frac{1}{a_{11}}(f_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(s)}), \\ x_i^{(s+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(s+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(s)}). \end{cases}$$

Такой метод будет сходиться быстрее, чем метод Якоби–Гаусса. Рассмотрим, что означает метод Гаусса–Зейделя с точки зрения МПИ. Представим  $A$  в следующем виде:

$$A = L + D + U.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} Lx^{(s+1)} + Dx^{(s+1)} + Ux^{(s)} &= f, \\ (L + D)x^{(s+1)} &= -Ux^{(s)} + f, \\ x^{(s+1)} &= \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{R}x^{(s)} + \underbrace{(L + D)^{-1}f}_{F}. \end{aligned}$$

**!**

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.  
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).*

**Теорема 7** Необходимым и достаточным условием сходимости метода Гаусса – Зейделя является требование, чтобы все  $\lambda_i$ , определяемые уравнением

$$\det \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \lambda a_{n3} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

были по модулю меньше единицы.

$$\forall i \quad |\lambda_i| < 1.$$

**Док-во:** Матрица перехода равна:

$$R = -(L + D)^{-1}U.$$

$$\det(R - \lambda E) = 0,$$

$$\det(-(L + D)^{-1}U - \lambda E) = 0,$$

$$\det(-(L + D)^{-1}) \det(U + \lambda(L + D)) = 0.$$

Получим, что

$$\det(U + \lambda(L + D)) = 0.$$

Дальше теорема доказывается аналогичным образом.

Для метода Гаусса основное число операций равно  $\frac{2}{3}n^3$ . Число операций МПИ в широком смысле равно  $2n^2s$ , где  $s$  — число итераций. Если

$$2n^2s < \frac{2}{3}n^3 \quad \Rightarrow \quad s < \frac{n}{3},$$

то применение итерационных алгоритмов является более эффективным. Для реальных задач  $s \ll \frac{n}{3}$ .

## 4. Метод последовательной верхней релаксации (ПВР)

Метод Зейделя дает сходимость лучше, чем метод Якоби, особенно для практически важных случаев, когда система уравнений обладает диагональным преобладанием. В случае диагонального преобладания выполняется:

$$\forall i \quad |a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

В этом случае метод Зейделя сходится быстрее, чем метод Якоби.

Пусть  $z_i^{(s+1)}$  —  $i$ -ая компонента решения, полученная методом Зейделя на  $s + 1$  итерации. Тогда:

$$x_i^{(s+1)} = x_i^{(s)} + \omega(z_i^{(s+1)} - x_i^{(s)}).$$



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)*



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).*

При  $\omega=1$  получим метод Зейделя. Тогда метод такого вида при  $0 < \omega < 1$  будем называть **методом нижней релаксации**, а при  $1 < \omega < 2$  — **методом последовательной верхней релаксации (ПВР)**.

$$x_i^{(s+1)} = (1 - \omega)x_i^{(s)} + \omega z_i^{(s+1)},$$

$$x_i^{(s+1)} = (1 - \omega)x_i^{(s)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(s+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(s)} \right).$$

В терминах  $L, D, U$  канонический вид записи ПВР будет следующим:

$$(L + \omega D) \frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\omega} + Ax^{(s)} = f.$$

**Теорема 8 (Островского–Рейча)** Пусть матрица  $A = A^* > 0$ . Тогда метод релаксации сходится для любого  $\omega \in (0; 2)$ . \*

Возникает вопрос, при каких значениях  $\omega_{\text{опт}}$  метод сходится быстрее всего. В общем случае ответа на этот вопрос нет. Однако значение  $\omega_{\text{опт}}$  известно для специального класса задач.

Пусть  $P$  — матрица перестановок, такая что:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} D_1 & T_{12} \\ T_{21} & D_2 \end{pmatrix},$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — диагональные матрицы.

Если переменные разделяются на два класса  $D_1$  и  $D_2$ , то существует такая перестановка, что каждое уравнение содержит элементы из  $D_1$  и связь  $T_{12}$  с элементами из  $D_2$ . И наоборот, каждый элемент из  $D_2$  имеет связь  $T_{21}$  с элементами из  $D_1$ . Важный класс уравнений (уравнения **Лапласа** и **Пуассона**) обладают этими свойствами. В них можно устроить такое разбиение переменных и воспользоваться тем, что оптимальное значение параметра  $\omega_{\text{опт}}$  существует.

Оптимальное значение итерационного параметра равно :

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(R_{\text{Якоби}})}}$$

Зависимость спектрального радиуса матрицы перехода от оптимального значения выглядит следующим образом (см. рис. 4.1).

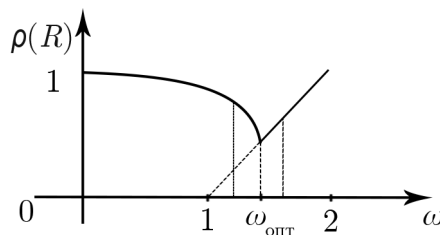


Рис. 4.1



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)*



**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

При  $\omega > \omega_{\text{опт}}$ ,  $\rho(R) \sim x$ . При  $\omega < \omega_{\text{опт}}$ ,  $\rho(R) \sim \sqrt{x}$ . Поэтому, если значение  $\omega_{\text{опт}}$  точно не известно, то лучше взять значение немного больше, чем немного меньше.

Рассмотрим влияние ошибок округления на результат вычисления решения итерационными методами. В точной арифметике имеем:

$$\vec{x}^{(s+1)} = R\vec{x}^{(s)} + f.$$

Ошибки округления приводят к тому, что

$$\tilde{x}^{(s+1)} = R\tilde{x}^{(s)} + f + \delta^{(s)},$$

где  $\delta^{(s)}$  — ошибка округления. Пусть  $|\delta^{(s)}| \leq \delta$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(s+1)} - x^{(s+1)} &= R(\tilde{x}^{(s)} - x^{(s)}) + \delta^{(s)}. \\ \|\tilde{x}^{(s+1)} - x^{(s+1)}\| &= \|R(\tilde{x}^{(s)} - x^{(s)})\| + \|\delta^{(s)}\| \leq \\ &\leq q\|\tilde{x}^{(s)} - x^{(s)}\| + \delta \leq \dots \\ \dots &\leq q^{(s+1)}\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| + \delta(q^{(s)} + q^{(s-1)} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Т. к. нулевое приближение задано точно, то  $\|\tilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| = 0$ . Тогда получим:

$$\|\tilde{x}^{(s+1)} - x^{(s+1)}\| \leq \delta(q^{(s)} + q^{(s-1)} + \dots + 1) \leq \frac{\delta}{1-q}.$$

Таким образом, было получено, что погрешность, вносимая ошибками округления, не зависит от количества итераций.

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)