
ЛЕКЦИЯ 5

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

На прошлой лекции были рассмотрены основные итерационные методы решения СЛАУ, такие как метод простой итерации в широком и узком смыслах, метод Якоби, метод Зейделя и метод последовательной верхней релаксации.

Пример 8

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = -1. \end{cases}$$

Точное решение системы имеет вид:

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решим систему уравнений методами Якоби, Зейделя и ПВР.

Тогда для метода Якоби получим:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = -0,5x_2^{(s)} + 0,5, \\ x_2^{(s+1)} = -0,5x_1^{(s)} - 0,5. \end{cases}$$

Для метода Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = -0,5x_2^{(s)} + 0,5, \\ x_2^{(s+1)} = -0,5x_1^{(s+1)} - 0,5. \end{cases}$$

Для метода ПВР:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = (1 - \omega)x_1^{(s)} + \omega(-0,5x_2^{(s)} + 0,5), \\ x_2^{(s+1)} = (1 - \omega)x_2^{(s)} + \omega(-0,5x_1^{(s+1)} - 0,5), \end{cases}$$

где значение параметра было выбрано $\omega = 1,1$.

Для каждого метода рассмотрим три итерации. Тогда получим следующие значения:



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$\ \vec{x}^{(3)} - \vec{x}^*\ $
Якоби	0,875	-0,875	0,125
Зейделя	0,969	-0,984	0,031
ПВР	1,0008	-1,0009	< 0,0001

*

Из таблицы видно, что метод ПВР сходится быстрее, чем методы Якоби и Зейделя. Вспомним, что для системы, в которой переменные можно разделить на два класса так, чтобы каждое уравнение связывало элемент одного класса с элементами другого, можно найти оптимальное значение параметра $\omega_{\text{опт}}$. Для систем уравнений с двумя переменными такое разделение выполняется всегда. Таким образом, при условии сходимости метода Якоби для системы второго порядка всегда можно найти оптимальное значение параметра.

Рассмотрим, чему равен спектральный радиус матрицы перехода для метода Якоби.

$$\vec{x} = R\vec{x} + \vec{F},$$

$$R_{\text{Якоби}} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda(R_{\text{Якоби}}) = \pm \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \rho(R_{\text{Якоби}}) = \frac{1}{2}.$$

Тогда для метода ПВР получим:

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \approx 1,07.$$

Именно поэтому значение ω было выбрано равным 1,1.

Теорема 9 Условие диагонального преобладания

$$\forall i \quad |a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| + \epsilon, \quad \epsilon > 0$$

— достаточно для сходимости метода Якоби.

*

Док-во: Возьмем кубическую норму вектора и подчиненную ей матричную норму.

$$\|\vec{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \Rightarrow \quad \|R\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Для оператора перехода метода Якоби получим:

$$x_i^{(s+1)} = -\frac{1}{a_{ij}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(s)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(s)} - f_i \right),$$

$$\|x_i^{(s+1)}\| \leq \max_{1 \leq j \leq i-1} |x_j^{(s)}| \alpha_i + \max_{i+1 \leq j \leq n} |x_j^{(s)}| \beta_i, \quad \forall i,$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

где

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

Тогда получим:

$$\|x^{(s+1)}\| \leq \|x^{(s)}\| (\alpha_i + \beta_i), \quad \forall i.$$

В силу условия диагонального преобладания имеем:

$$\frac{\sum_{i \neq j} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Тогда получим:

$$\|\vec{x}^{(s+1)} - \vec{x}^*\| \leq \underbrace{(\alpha_i + \beta_i)}_{q < 1} \|\vec{x}^{(s)} - \vec{x}^*\|.$$

Откуда следует, что метод Якоби сходится при условии диагонального преобладания.

Теорема 10 При условии диагонального преобладания метод Зейделя сходится быстрее метода Якоби. *

Док-во: Запишем метод Зейделя в матричном виде:

$$\vec{x}^{(s+1)} = -(L + D)^{-1}U \vec{x}^{(s)} + (L + D)^{-1}f.$$

Точное решения уравнения удовлетворяет условию:

$$\vec{x}^* = -(L + D)^{-1}U \vec{x}^{(*)} + (L + D)^{-1}f.$$

Тогда для погрешности решения получим:

$$\vec{\delta}^{(s+1)} = \vec{x}^{(s+1)} - \vec{x}^*,$$

$$\vec{\delta}^{(s+1)} = -(L + D)^{-1}U \vec{\delta}^{(s)}.$$

Или в покомпонентном представлении:

$$\delta^{(s+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \delta_j^{(s+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \delta_j^{(s)} \right).$$

$$\|\delta^{(s+1)}\| \leq \frac{1}{|a_{ij}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| |\delta_j^{(s+1)}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| |\delta_j^{(s)}| \right).$$

Из каждой суммы вынесем максимальное значение погрешности.

$$\|\delta^{(s+1)}\| \leq \max_{1 \leq j \leq i-1} |\delta_j^{(s+1)}| \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \max_{i+1 \leq j \leq n} |\delta_j^{(s+1)}| \frac{\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$\|\delta^{(s+1)}\| \leq \max_{1 \leq j \leq i-1} |\delta_j^{(s+1)}| \alpha_i + \max_{i+1 \leq j \leq n} |\delta_j^{(s+1)}| \beta_i.$$

Пусть максимум достигается на m -ой компоненте.

$$\|\delta^{(s)}\| = \max_i |\delta_j^{(s)}| \equiv |\delta_m^{(s)}|.$$

Тогда последнее неравенство перепишем в виде:

$$\|\delta^{(s+1)}\| \leq \|\delta^{(s+1)}\| \alpha_m + \|\delta^{(s)}\| \beta_m.$$

Или

$$\|\delta^{(s+1)}\| \leq \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} \|\delta^{(s)}\|,$$

где

$$q_3 = \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m}.$$

Для метода Якоби было получено: $q_{\text{я}} = \alpha_m + \beta_m$. По условию диагонального преобразования $\alpha_m + \beta_m < 1$.

$$\beta_m \leq \beta_m + \alpha_m(1 - \alpha_m - \beta_m) = (1 - \alpha_m)(\alpha_m - \beta_m)$$

Разделим на $1 - \alpha_m$ и получим:

$$\frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} \leq \alpha_m + \beta_m.$$

Значит, радиус сходимости метода Зейделя меньше, чем радиус сходимости метода Якоби. Таким образом, метод Зейделя при условии диагонального преобладания сходится быстрее, чем метод Якоби.

Условие диагонального преобладания — очень сильное условие. Для матрицы размера 2×2 можно показать, что методы Зейделя и Якоби сходятся и расходятся одновременно. Однако для матриц большей размерности можно построить пример, когда один из методов сходится, а другой расходится.

1. Чебышевское (трехслойное) ускорение МПИ

Рассмотрим систему уравнений:

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

Пусть данная система уравнений с помощью какого-либо метода была сведена к виду:

$$\vec{u} = R\vec{u} + \vec{F}.$$

Рассмотрим МПИ в виде

$$\vec{u}^{(s+1)} = R\vec{u}^{(s)} + \vec{F},$$

который сходится к точному решению.

$$u^{(s)} \rightarrow u^{(*)}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Пусть известна последовательность приближений $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)} \dots u^{(m)}$. Построим новое приближение, которое является линейной комбинацией приближений, полученных на предыдущей итерации.

$$y_m = \sum_{i=0}^m \gamma_{im} u^{(i)}.$$

Если $u^{(0)} = u^{(1)} = u^{(2)} = \dots = u^{(m)} = u^{(*)}$, $\Rightarrow y_m = u^{(*)}$. Тогда получим:

$$\sum_{i=0}^m \gamma_{im} = 1.$$

Для погрешности решения будем иметь:

$$\begin{cases} u^{(m)} = Ru^{(m-1)} + F, \\ u^{(*)} = Ru^{(*)} + F. \end{cases}$$

$$\delta^{(m)} = R(u^{(m-1)} - u^{(*)}),$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^{(m)} &= y_m - u^{(*)} = \sum_{i=0}^m \gamma_{im} u^{(i)} - u^{(*)} = \sum_{i=0}^m \gamma_{im} (u^{(i)} - u^{(*)}) = \\ &= \sum_{i=0}^m \gamma_{im} (Ru^{(i-1)} - Ru^{(*)}) = \dots = P_m(R)(u^{(0)} - u^{(*)}), \end{aligned}$$

где

$$P_m(R) = \sum_{i=0}^m \gamma_{im} R^i.$$

Если $P_m(R)$ — характеристический многочлен, то по теореме Гамильтона–Кэли $P_m(R) = 0$. Однако эту теорему не всегда можно использовать по следующим причинам:

1. Как правило, все собственные значения матрицы R неизвестны.
2. Теорему можно применить, если $m = n$, где n — размерность матрицы R .

Поэтому в общем случае нельзя использовать теорему Гамильтона–Кэли. Но можно найти такой многочлен $P_m(x)$, который на отрезке $[-\rho; \rho]$ имел бы минимальное отклонение от нуля.

Решение этой задачи возможно при 2-х условиях:

1. Спектральный радиус $\rho(R) \leq \rho$, т. е. все собственные значения R расположены на отрезке $[-\rho; \rho]$.
2. Все собственные значения матрицы перехода действительны.

Если первое условие довольно очевидно, то понять, имеет ли R комплексные собственные значения в реальных задачах, бывает довольно сложно. Такая задача построения многочлена была решена Чебышевым.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

6

2. Многочлены Чебышева

Многочленами Чебышева называют многочлены вида:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x),$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Все многочлены определены на интервале $[-1; 1]$, и для каждого выполняется:

$$\forall n \quad |T_n(x)| \leq 1.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Рассмотрим, как будут выглядеть многочлены Чебышева для разных n .

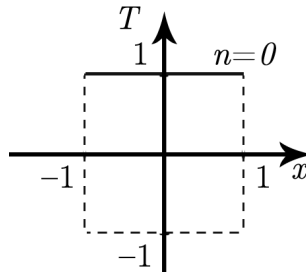


Рис. 5.1

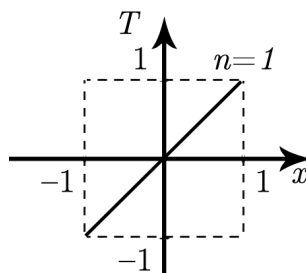


Рис. 5.2

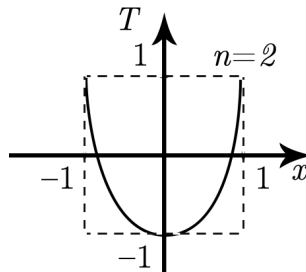


Рис. 5.3

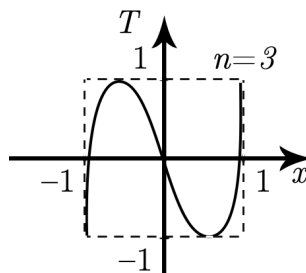


Рис. 5.4



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Приведенным многочленом Чебышева будем называть многочлен, у которого старший коэффициент при x^n равен единице.

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x).$$

Рассмотрим многочлен следующего вида:

$$P_m(x) = \frac{T_m\left(\frac{x}{\rho}\right)}{T_m\left(\frac{1}{\rho}\right)}.$$

Такой многочлен удовлетворяет следующим свойствам:

1. $P_m(x)$ определен на отрезке $[-\rho; \rho]$ и $|P_m(x)| \leq \rho$.
2. $P_m(1) = 1$.

Рассмотрим, насколько сильно меняется значение многочлена за границами отрезка $[-1; 1]$. Пусть

$$x = \frac{1}{1 + \epsilon}, \quad \epsilon > 0, \quad T_m(1 + \epsilon).$$

Получим следующую таблицу:

$m \setminus \epsilon$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
10	1	1,1	2,2
100	2,2	44	$6,9 \cdot 10^5$
200	8,5	$3,8 \cdot 10^3$	$9,4 \cdot 10^{11}$
1000	$6,9 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^{19}$	$1,2 \cdot 10^{61}$

Если значение $\frac{x}{\rho}$ меняется на отрезке $[-\rho; \rho]$, а $\rho = \frac{1}{1 + \epsilon}$, то:

$$P_m(x) \leq \frac{1}{T_m\left(\frac{1}{1/(1 + \epsilon)}\right)} \leq \frac{1}{T_m(1 + \epsilon)}.$$

$$P_m(x) = \frac{T_m\left(\frac{x}{\rho}\right)}{T_m\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \mu_m T_m\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

где

$$\mu_m = \frac{1}{T_m\left(\frac{1}{\rho}\right)}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Рекурсивные соотношения для многочлена Чебышева выполняются и при $x = \frac{1}{\rho}$. Тогда будем иметь:

$$\frac{1}{\mu_{m+1}} = 2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_{m-1}},$$

$$\frac{1}{\mu_m} = 2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}}.$$

Рассмотрим, как при этом будет меняться решение:

$$\begin{aligned} y_m - u^* &= P_m(R)(u^0 - u^*) = \mu_m T_m \left(\frac{R}{\rho} \right) (u^0 - u^*) = \\ &= \mu_m \left(2 \frac{R}{\rho} T_{m-1} \left(\frac{R}{\rho} \right) (u^0 - u^*) - T_{m-2} \left(\frac{R}{\rho} \right) (u^0 - u^*) \right) = \\ &= \mu_m \left(\frac{2}{\rho} R (u^{(m-1)} - u^*) \mu_{m-1}^{-1} - (u^{(m-2)} - u^*) \mu_{m-2}^{-1} \right). \end{aligned}$$

Приведем выражение к следующему виду:

$$y_m = \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{R}{\rho} u^{(m-1)} - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} u^{(m-2)} + dm,$$

где

$$dm = u^* - \frac{2\mu_m}{\mu_{m-1}} \frac{R}{\rho} u^* + \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} u^*.$$

Вспомним, что для u^* выполняется уравнение:

$$u^* = Ru^* + F, \quad \Rightarrow \quad Ru^* = u^* - F.$$

Тогда получим:

$$dm = \mu_m \left(\frac{1}{\mu_m} - 2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}} \right) u^* + 2 \frac{\mu_m}{\mu_{m-1}} F.$$

Ранее было получено:

$$\frac{1}{\mu_m} = 2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}}.$$

В силу рекурсии многочлена Чебышева:

$$\frac{1}{\mu_m} - 2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\mu_{m-1}} - \frac{1}{\mu_{m-2}} = 0.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

В итоге получим итерационный процесс:

$$\begin{cases} \mu_0 = 1, & \mu_1 = \rho, \\ y_0 = u^0, & y_1 = Ru^0 + F, \\ \mu_m = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \rho\mu_{m-1} & \mu_{m-2} \end{array} \right]^{-1}, \\ y_m = \frac{2}{\rho\mu_{m-1}} Ry_{m-1} - \frac{\mu_m}{\mu_{m-2}} y_{m-2} + \frac{2}{\rho\mu_{m-1}} F. \end{cases}$$

Таким образом, была получена формула ускорения МПИ.

Для ускорения итераций используются все приближения от 0-го до n -го, но в окончательной формуле ускорения используются всего лишь 2 предыдущих слоя: n и $n - 1$.

Таким образом, с помощью многочленов Чебышева можно построить ускорение, используя только 3 слоя: $n, n - 1, n - 2$. Однако при этом должны выполняться условия, что известен спектральный радиус, и все собственные значения матрицы перехода действительные. В противном случае построить эффективный итерационный метод не удастся.

Замечание Все оценки сходимости были сделаны, исходя из априорного условия, что известен спектральный радиус матрицы перехода. В больших задачах, размерность которых равна $n \approx 10^6$, невозможно иметь априорную информацию о значении ρ . К тому же ρ может принимать близкие к единице значения. В этом случае возникает вопрос, в какой момент нужно заканчивать итерации, если есть только последовательность итерационных приближений $x^{(s)}, x^{(s+1)} \dots$ *

3. Окончание итерационного процесса

Пусть имеем оценку:

$$\|u^{(s)} - u^*\| \leq \epsilon,$$

где ϵ — заданная точность.

Значение u^* неизвестно, однако известна **итерационная поправка** $|u^{(s+1)} - u^{(s)}|$. Возникает вопрос, как исходя из значения итерационной поправки понять, когда стоит закончить итерационный процесс так, чтобы $\|u^{(s)} - u^*\| \leq \epsilon$. Если потребовать, чтобы $\|u^{(s+1)} - u^{(s)}\| \leq \epsilon$, можно добиться **эффекта ложной сходимости**.

Предположим, что метод сходится.

$$u^{(s)} \rightarrow u^*, \quad s \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим ошибку:

$$\|u^{(s)} - u^*\| = \|u^{(s)} - u^\infty\| = \|\underbrace{u^{(s)} - u^{(s+1)}} + \underbrace{u^{(s+1)} - u^{(s+2)}} + \underbrace{u^{(s+2)} - u^{(s+3)}} \dots u^{(\infty)}\|.$$

Для норм векторов воспользуемся неравенством треугольника. Тогда получим:

$$\|u^{(s)} - u^*\| \leq \sum_{k=s}^{\infty} \|u^{(k)} - u^{(k+1)}\| \leq \|u^{(s)} - u^{(s+1)}\| (1 + q + q^2 \dots) \leq$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

11 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$\leq \|u^{(s)} - u^{s+1}\| \frac{1}{1-q} \leq \epsilon.$$

Для того чтобы вовремя завершить итерационный процесс необходимо

$$\|u^{(s)} - u^*\| \leq \epsilon(1-q).$$

Если, например, $\epsilon = 10^{-3}$, а $q = 0,9999$, то $\|u^{(s)} - u^*\| = 10^{-7}$. Таким образом, множитель $(1-q)$ вносит очень большой вклад в значение итерационной поправки. Значение q вычисляется следующим образом:

$$q = \frac{\|u^{(s)} - u^{(s-1)}\|}{\|u^{(s-1)} - u^{(s-2)}\|}.$$

4. Итерационные методы вариационного типа

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$A\vec{x} = \vec{f}.$$

Поставим в соответствие линейному уравнению квадратичный функционал:

$$\Phi(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) - 2(\vec{f}, \vec{x}) + c.$$

Будем считать, что

$$A = A^* > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (Ax, x) > 0.$$

Замечание Если матрица A не является самосопряженной, то можно рассмотреть функционал следующего вида:

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, A^*\vec{x}) = (A^*\vec{x}, \vec{x}),$$

$$\Phi(\vec{x}) = \left(\frac{A + A^*}{2} \vec{x}, \vec{x} \right) - 2(\vec{f}, \vec{x}) + c.$$

Теорема 11 Для системы уравнений

$$A\vec{x} = \vec{f}$$

существует единственный \vec{v} , который одновременно является решением СЛАУ и доставляет минимум функционалу $\Phi(x)$. *

Док-во: 1. Т. к. $A = A^* > 0$, то $\det A \neq 0$, $\Rightarrow \exists! \vec{v} : A\vec{v} = \vec{f}$.

В точке минимума

$$\nabla \Phi(\vec{x}) = 2A\vec{x} - 2\vec{f} = 0.$$

Если \vec{v} такое, что $A\vec{v} = \vec{f}$, то $\nabla \Phi(\vec{x}) = 0$. Значит, v — точка минимума функционала $\Phi(x)$.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

2. Пусть \vec{v} — точка минимума функционала $\Phi(\vec{x})$.
Покажем, что $\forall \alpha \neq 0, \Phi(v + \alpha) > \Phi(v)$.

$$\begin{aligned}\Phi(v + \alpha) &= (A(v + \alpha), v + \alpha) - 2(f, v + \alpha) + c = \\ &= (Av, v) + (A\alpha, v) + (Av, \alpha) + (A\alpha, \alpha) - 2(f, v) - 2(f, \alpha) + c = \\ &= \Phi(v) + (2Av - 2f, \alpha) + (A\alpha, \alpha).\end{aligned}$$

Т. к. \vec{v} — решение системы, то $(2Av - 2f, \alpha) = 0$. Тогда, если $\alpha \neq 0$, то в силу положительной определенности матрицы A получим, что

$$\Phi(v + \alpha) > \Phi(v).$$

Значит, \vec{v} является решением СЛАУ. ■