ЛЕКЦИЯ 7

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

На прошлой лекции была рассмотрена задача решения переопределенной системы. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = f_n, \end{cases}$$

при условии, что количество уравнений превышает количество неизвестных, $n \gg m$. Если ранг матрицы не равен m, то о точном решении сказать ничего нельзя.

В этом случае можно составить функционал невязок:

$$r_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, x_j - f_k,$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Если потребовать, чтобы решение получалось не исходя из условия точного удовлетворения каждому уравнению системы, а исходя из требования минимизации функционала, то в этом случае условие минимума функционала определяет **обобщенное решение** переопределенной системы.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 \to \min.$$

Тогда получим:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, x_j - f_k \right)^2 \to \min.$$

Функционал квадратичен по переменной x. Поэтому необходимым и достаточным условием существование минимума является условие:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, x_j - f_k \right) a_{kl} = 0.$$

Получим линейную систему для определения x_i вида:

$$Bx = F,$$

или

$$A^T A x = A^T f.$$

Т. к. $A > 0$ и $\det A \neq 0$, то решение существует и единственно. При использовании метода наименьших квадратов возникает задача неточной интерполяции.

1. Неточная интерполяция

Пусть задана таблица аргументов функции и ее значений:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Приблизим функцию $y = f(x)$ с помощью некоторой функции ϕ.

$$y = f(x), \quad y \approx \phi(x, a_0, a_1, \dots a_n),$$

где a_i — некоторые параметры.

Если $m = n$, то такая задача называется задачей точной интерполяции. Однако, если значения $y_1, y_2 \dots y_n$ заданы с погрешностью, то точная интерполяция может привести к большим ошибкам. Поэтому во многих случаях нет смысла решать задачу точной интерполяции. Можно найти приближенную зависимость $y \approx \phi(x)$ при условии $m \ll n$.

Рассмотрим, как можно найти значения параметров a_i. Для этого построим функционал невязок и минимизуруем его.

$$\Phi(x, a_0, a_1, \dots a_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\phi(x, a_0, a_1, \dots a_n) - y_k\right)^2.$$

Возможно, что функция ϕ не пройдет ни через одну из точек y_i. С помощью интерполяции можно увидеть общий вид поведения функции. Конкретный вид функции ϕ будет зависеть от метода выбора параметров a_i.

Широко применяются несколько двух- и трехпараметрических функций.

Двухпараметрическая интерполяция

1. $\phi(x, a, b) = ax + b$,
2. $\phi(x, a, b) = a\,\mathrm{e}^{bx}$,
3. $\phi(x, a, b) = a \ln x + b$,
4. $\phi(x, a, b) = a + \dfrac{b}{x}$,

5. $\phi(x, a, b) = \dfrac{1}{ax+b}$,

и т. д.

Трехпараметрическая интерполяция

1. $\phi(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$,
2. $\phi(x, a, b, c) = a\,\mathrm{e}^{bx} + c$,
3. $\phi(x, a, b, c) = a \ln x + bx + c$,

и т. д.

В случае, если $\phi(x)$ является линейной по параметру, то говорят, что $\phi(x)$ представляет из себя обобщенный полином.

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, \phi(x).$$

Наиболее распространена **степенная интерполяция**, где $\phi(x)$ многочлен. Если $\phi_i(x)$ тригонометрические функции, то такую интерполяцию называют **тригонометрической**.

Пример 9 Пусть задан набор $\{x_i; y_i\}$, $i = 0 \ldots 1$. Построим приближающий многочлен $\phi(x)$ в виде:

$$\phi(x, a, b) = ax + b.$$

Задача сводится к минимизации следующего функционала:

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min,$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0: \quad 2\sum\limits_{i=0}^{n} (ax_i + b - y_i) x_j = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0: \quad 2\sum\limits_{i=0}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы будут значения:

$$a = \frac{(n+1)\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \sum\limits_{i=0}^{n} y_i}{(n+1)\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\, y_i\right) \sum\limits_{i=0}^{n} x_i}{(n+1) \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)^2}.$$

Рассмотрим, что получится для обобщенного многочлена, если

$$\phi(x, a_0 \dots a_m) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \phi_i(x).$$

В этом случае квадратичный функционал примет вид:

$$\Phi(x, a_0 \dots a_m) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, \phi_i(x) - y_k\right)^2.$$

Условие минимума эквивалентно равенству нулю производной:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0: \quad 2\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, \phi_i(x) - y_k\right) \phi_j(x_k) = 0.$$

Или в виде системы:

$$\begin{cases} (\phi_0, \phi_0)a_0 + (\phi_0, \phi_1)a_1 + \dots + (\phi_0, \phi_m)a_m = (\phi_0, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\phi_m, \phi_0)a_0 + (\phi_m, \phi_1)a_1 + \dots + (\phi_m, \phi_m)a_m = (\phi_0, y), \end{cases}$$

где скалярное произведение сеточной функции равно:

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\, \phi_j(x_k),$$

$$(\phi_i, y) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\, y_k.$$

Коэффициенты системы уравнений образуют матрицу Грамма, которая является симметричной и положительно определенной. Поэтому решение системы существует и единственно.

Таким образом, в задаче неточной интерполяции было получено, что решение существует и единственно, но оно не является точным. Решение приближает функцию заранее выбранным способом.

Замечание До сих пор функционал рассматривался в виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Однако можно минимизировть функционал:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \rho_k\, r_k^2,$$

где ρ_k — вес точки k.

Известно, что на концах интервала измерений точность существенно ниже, чем в середине. Поэтому при $k = 0$ и $k = n$ вес будет меньше. Можно ввести некую зависимость $\rho(k)$.

Пример 10 Пусть напряженность магнитного поля B и индукция H связаны соотношением:

$$B = \frac{H}{a + bH},$$

и задана таблица:

H	H_0	H_1	...	H_n
B	B_0	B_1	...	B_n

*

Если введем функционал

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{a + bH_k} - B_k \right)^2$$

и попытаемся его минимизировать, то получим нелинейную систему из 2-х уравнений, решать которую довольно сложно. Однако, немного изменив функционал, можно свести задачу минимизации к задаче решения СЛАУ.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a + bH_k)^2} \left(H_k - B_k(a + bH_k)\right)^2 .$$

Введем итерационный процесс, где значения a_0 и b_0 являются решениями следующей задачи:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \left(H_k - B_k(a + bH_k)\right)^2 .$$

Получим итерационный процесс:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(a^{(s-1)} + b^{(s-1)}H_k)^2}}_{\rho_k} \left(H_k - B_k(a^{(s)} + b^{(s)}H_k)\right)^2 .$$

Тогда на каждом шаге будет возникать линейная система, которая легко решается. Поэтому в этом случае удобно минимизировать функционал с весом

$$\rho = \frac{1}{(a^{(s-1)} + b^{(s-1)}H_k)^2}.$$

Таким образом, введение веса может быть обусловлено физическими причинами, т. к. все точки дают разные достоверности значений. Или же вес можно ввести для того, чтобы упростить решение задачи.

2. Интерполяция

Пусть заданы некоторый набор точек и набор значений в этих точках:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Возникает вопрос, что находится в промежутках между этими точками и возможно ли восстановить значения функции.

Таким образом, при решении задачи сначала проецируем функцию на сетку и приводим к виду: $\{y_i\}$. После чего с помощью операции интерполяции переводим значения $\{y_i\}$ в $\phi(x)$ так, чтобы $y(x) \approx \phi(x)$.

Задача проецирования довольно проста. Однако задача интерполяции не только нетривиальна, но и некорректна. Одной непрерывности функций $y(x)$ и $\phi(x)$ недостаточно, чтобы можно было достоверно судить о степени близости функций.

Задача интерполяции делится на две разные задачи:

1. **Задача глобальной интерполяции**, когда необходимо на всем отрезке $[a;b]$ построить единую функцию, приближающую $f(x)$.

2. **Задача построения сплайнов**, когда на каждом из отрезков $[x_i;x_{i+1}]$ строятся приближающие функции, а в узлах интерполяции эти функции сшиваются.

При этом возникают следующие вопросы:

1. - Известна ли $y(x)$ как непрерывная функция или как сеточная функция.
   - Степень гладкости функции $y(x)$.
   - Известны ли значения производных функции $y(x)$.
   - Вариативность узлов сетки (заданы ли узлы фиксированно или же их можно выбирать).

2. - К какому классу принадлежит функция $\phi(x)$?
   - Степень гладкости функции $\phi(x)$.
   - Какие отличительные признаки для выделения функции $\phi(x)$ заданного класса?

3. - В какой норме измеряется близость функций $y(x)$ и $\phi(x)$?

В зависимости от ответа на эти вопросы происходит выбор той или иной интерполяции. Будем рассматривать интерполяцию **без кратных узлов**, т. е. интерполяцию, в которой не имеем информации о значениях производных в заданных точках.

3. Полиномиальная интерполяция

Будем искать многочлен, приближающий функцию $y(x)$, в виде:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k\, x^k,$$

где $\phi_k(x) = x^k$.

Для нахождения коэффициентов составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_0x_0^0 + C_1x_0^1 + \dots + C_nx_0^n = y_0, \\ C_0x_1^0 + C_1x_1^1 + \dots + C_nx_1^n = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_0x_n^0 + C_1x_n^1 + \dots + C_nx_n^n = y_n, \end{cases}$$

Система линейна относительно коэффициентов C_i. Определитель системы равен определителю Вандермонда. Из курса линейной алгебры известно, что решение такой системы существует и единственно.

Существуют два представления интерполяционного многочлена: в форме **Лагранжа** и в форме **Ньютона**.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Введем функцию

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Значение многочлена в точке k_j равно $l_k(x_j) = \delta_{kj}$. Функция выглядит следующим образом.

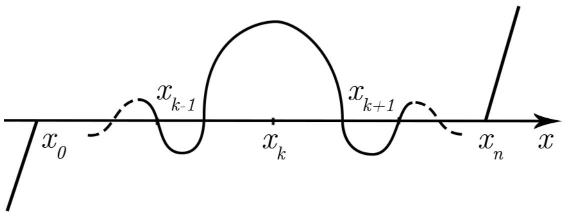

Рис. 7.1

Функция принимает значение равное единице в точке x_k и проходит через все узлы сетки. Будем обозначать следующим образом:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, l_k(x).$$

В силу того, что во всех точках k_j функция равна $l_k(x_j) = \delta_{kj}$, получим:

$$P_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, l_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, \delta_{kj} = y_j,$$

т. е. многочлен проходит через все узлы интерполяции.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Введем рекурсивно разделенные разности: Разница 0-го порядка — это значение в точке $f(x_k)$.

Разность первого порядка:

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}.$$

Разность второго порядка:

$$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}, x_{k+2}) - f(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}.$$

Разность p-го порядка:

$$f(x_k, x_{k+1}, \dots x_{k+p}) = \frac{f(x_{k+1}, \dots x_{k+p}) - f(x_k, \dots x_{k+p-1})}{x_{k+p} - x_k}.$$

Запишем разделенную разность второго порядка на равномерной сетке:

$$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}, x_{k+2}) - f(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\dfrac{f_{k+2} - fk + 1}{h} - \dfrac{f_{k+1} - fk}{h}}{2h} =$$

$$= \frac{f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k}{2h^2} \approx \frac{1}{2!} f'',$$

где $h = x_{k+2} - x_{k+1}$.

Таким образом, получим, что разделенная разность — это аналог производной функции. Значит интерполяционный многочлен в форме Ньютона является аналогом ряда Тейлора.

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$\dots + f(x_0, x_1 \dots x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Точно также можно построить интерполяционный многочлен, использую производную назад:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + \dots + f(x_n, x_{n-1} \dots x_0)(x - x_n) \dots (x - x_1).$$

При этом результат вычисления будет одинаковым. В зависимости от поставленной задачи бывает удобно использовать интерполяционный многочлен вперед или назад.

Пример 11 Пусть задана некоторая функция в узлах сетки $x_k = 0{,}4 + 0{,}2k$, где $k = 0 \dots 8$. Нужно найти значение функции в точке $x = 0{,}5$.

Для первых двух значений функции найдем первую разность:

$$\Delta y = \frac{0{,}157 - 0{,}336}{0{,}2} = -0{,}895.$$

Аналогичным образом найдем значения всех разделенных разностей для всех значений x_i. Получим следующую таблицу:

x_i	y_i	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,4	0,336					
		−0,895				
0,6	0,157		0,775			
		−0,585		3,13		
0,8	0,040		0,963		−3,16	
		−0,200		0,060		3,06
1,0	0		1,000		−0,10	
		0,200		−0,020		0,075
1,2	0,040		0,987		−0,025	
		0,595		−0,040		
1,4	0,159		0,963		0,050	
		0,970		0		
1,6	0,353		0,963			
		1,345				
1,8	0,622					

*

Не смотря на то, что шаг сетки равномерный, значения $\Delta^4 y$ меняются довольно сильно. Это означает, что для вычисления значения функции в искомой точке нужно использовать предыдущие значения. Посчитаем интерполяционный многочлен по первой строке.

$$P_3(0{,}5) = 0{,}336 + (-0{,}895)(0{,}5-0{,}4) + 0{,}775(0{,}5-0{,}4)(0{,}5-0{,}6) +$$

$$+3{,}13(0{,}5-0{,}4)(0{,}5-0{,}6)(0{,}5-0{,}8) \approx 0{,}239.$$

В данном примере исходной функцией была функция $y(x) = x(\ln x)^2$, $y(0{,}5) = 0{,}24022$.

Вспомогательный многочлен

Рассмотрим многочлен следующего вида:

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Тогда

$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{i\neq j}(x-x_j).$$

Рассмотрим, какое значение принимает $\omega'_{n+1}(x_k)$ в точке узла интерполяции. Пусть

$$\omega_3 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Тогда

$$\omega'_3 = (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1).$$

В общем случае для $\omega'_{n+1}(x_k)$ получим:

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{j\neq k}(x_k - x_j).$$

Таким образом, вспомогательный многочлен можно представить в виде многочлена Лежандра.

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_k)\prod\limits_{j\neq k}(x - x_j)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x - x_k)} =$$

$$= \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(x_k)(x - x_k)}.$$