Данный курс посвящен основам теории вероятностей. Теория вероятностей применяется во многих случаях, в том числе и при решении комбинаторных задач. Сначала будет дано классическое определение вероятности, а позже — аксиоматика Колмогорова, которая была предложена как решение проблемы основания теории вероятностей.

1. Классическое определение вероятности

1.1. Историческое отступление: зарождение теории вероятностей

На заре становления теории вероятностей было предложено так называемое классическое определение вероятности, в основе которого лежала проблема нахождения шанса выиграть и правильной стратегии в азартных играх. Позже выяснилось, что понятие вероятности выиграть никим образом помочь не может. Вернее, какие-то алгоритмы всё-таки были созданы, но становились бесполезными почти сразу: казино вскоре узнавало про них и корректировало правила игры.

В настоящее время проблема нахождения выигрышной стратегии в азартных играх не представляет практической ценности. Однако, чтобы правильно понимать историю возникновения теории вероятностей, начинать её изучение стоит именно с данной задачи.

Одним из классических вероятностных объектов является обычная игральная кость. Более простой объект — монетка, которая может упасть на стол «орлом» или «решкой» — слишком просто устроен и слабо подходит для первого знакомства. Поэтому в первую очередь с вероятностной точки зрения будет изучена именно игральная кость.

1.2. Классическое определение вероятностей

Пример. Игральная кость Игральная кость представляет собой это кубик, грани которого пронумерованы от одного до шести, обычно круглыми точками. Кость бросают на стол и фиксируют число на той грани, которая оказывается сверху в результате броска. Можно предположить, что форма кубика идеальная и на ребро он упасть не может. В таком случае всего имеют место 6 различных исходов такого броска, причем для них выполняются следующие свойства:

1. Исходы образуют полную группу событий, то есть хотя бы один из них имеет место в результате броска
2. Исходы попарно несовместны, то есть никакие два одновременно произойти не могут
3. Все исходы равновероятны

В результате рассмотрения игральной кости появилось классическое определение вероятностей.

Исходы, обладающие перечисленными свойствами образовывать полную группу событий, быть попарно несовместными и равновероятными, называются **элементарными исходами**.

Классическое определение вероятностей. Пусть различные исходы $\omega_1, \dots, \omega_n$ некоторого эксперимента являются элементарными. Тогда по определению вероятностью произвольного каждого такого исхода называют величину

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Пример. Игральные карты. Пусть дана колода из 36 тщательно перетасованных карт. В этом случае элементарными исходами являются различные последовательности карт внутри колоды, то есть различные варианты их взаимного расположения. Эти исходы, которых всего 36!, образуют полную группу событий и попарно несовместны. Вероятность каждого исхода

$$P(\omega_i) = \frac{1}{36!}.$$

Часто бывает необходимым рассматривать события несколько более сложные, чем элементарные исходы. Например, событию «в результате броска игральной кости выпало четное число очков» соответствуют три благоприятных элементарных исхода $\omega_2, \omega_4, \omega_6$.

Вероятность события. Вероятность некоторого события A полагают равной отношению количества элементарных исходов k, которые благоприятствуют событию, к количеству всех возможных элементарных исходов n:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

1.3. Основные свойства вероятности

Если принять классическое определение как определение вероятности, то несложно получить следующие свойства.

Под событием удобно понимать множество таких элементарных исходов, которые ему благоприятствуют. Множество же всех элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ называется пространством элементарных исходов, где n — количество всевозможных элементарных событий.

Свойство 1. Вероятность $P(\Omega)$ события Ω, которое состоит в том, что реализуется любой элементарный исход, равняется 1. Такое событие называется достоверным.

Свойство 2. В классическом определении вероятностей нулевую вероятность имеет событие, которое соответствует пустому множеству элементарных исходов, и только оно: $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Свойство 3. Вероятность дизъюнктного объединения двух событий A и B, то есть таких событий, что A и B имеют пустое пересечение, равна сумме их вероятностей $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$.

Свойство 4. Вероятность объединения двух произвольных событий A и B равна $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Свойство 5. Более того, верна формула включений-исключений, которая была доказана в курсе комбинаторики:

$$P(A_1 U \dots U A_k) = P(A_1) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots -$$
$$- P(A_{k-1} \cap A_k) + \dots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_k).$$

Естественным следствием является выражение для элементарной оценки сверху вероятности суммы нескольких событий.

Свойство 6. $P(A, \cup \dots \cup A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$.

Отрицанием события A называется событие $\bar{A}$, которому благоприятствуют только такие исходы, которые не благоприятствуют событию A. Тогда верно следующее.

Свойство 7. Вероятность события $\bar{A} \coloneqq \Omega \backslash A$ равна $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Задача о раскрасках

Формулировка задачи

Пусть зафиксированы некоторые 15 подмножеств M_i множества $1, 2, \dots, 30$, причем мощность каждого такого подмножества, то есть количество элементов в нем, равняется 5:

$$M_1, \dots, M_{15} \subset 1, 2, \dots, 30, \; |M_i| = 5.$$

Верно ли, что, каким бы образом не были зафиксированы множества M_i, всегда найдется раскраска в 2 цвета элементов множества $1, 2, \dots, 30$, при которой каждое множество M_i включает как элементы одного цвета, так и элементы другого?

Априори ответ абсолютно не очевиден. Решение можно проводить с помощью принципа Дирихле, но правильнее в данный момент решить эту задачу с помощью вероятностного подхода, чтобы продемонстрировать возможность применения языка теории вероятностей для решения сложных задач.

Решение этой задачи придумал великий венгерский математик Пол Эрдёш в 1961 г., создатель современной школы комбинаторики и теории графов. Он показал, что требуемую раскраску можно найти всегда.

Решение

Пусть дана некоторая случайная раскраска χ множества $\{1, 2, \dots, 30\}$. Количество всех возможных раскрасок равняется 2^{30}, а значит пространство элементарных исходов Ω в данном случае равняется множеством всех раскрасок

$$\Omega = \{\chi_1, \dots, \chi_{2^{30}}\}.$$

Можно проверить, что выбранные таким образом элементарные исходы обладают требуемыми свойствами: образуют полную группу событий, несовместны и равновероятны. Тогда вероятность возникновения каждой раскраски: $P(\chi_i) = \frac{1}{2^{30}}$.

Сопоставим каждому множеству M_i событие A_i, которое состоит в том, что в случайной раскраске множество M_i одноцветно. Вероятность $P(A_i)$ события A_i можно найти по определению как отношение количества раскрасок, в которых множество M_i одноцветно, к общему количеству раскрасок $n = 2^{30}$:

$$P(A_i) = \frac{2 \cdot 2^{25}}{2^{30}} = \frac{1}{16}.$$

Вероятность события, состоящего в том, что в случайной раскраске среди множеств $M_1, \ldots, M_{15}$ найдется одноцветное, равняется

$$P(\cup_{i=1}^{15} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{15} P(A_i) < 1,$$

где была использована оценка сверху для вероятности объединения произвольных событий. Тогда вероятность отрицания этого события, то есть события, состоящего в том, что одноцветных множеств среди M_i нет, строго положительна $P(\frac{M_i}{\cup_{i=1}^{15} A_i}) > 0$. Другими словами, существует раскраска, в которой все множества M_i неодноцветны. Утверждение доказано.

3. Условная вероятность и независимость событий

3.1. Понятие об условной вероятности

Пример. Пусть игральную кость бросают один раз. Событие A состоит в том, что выпало 1 очко, а B — в том, что выпало четное число очков. Требуется найти вероятность $P(A|B)$ события A, если уже известно, что событие B произошло. Как изменится ответ, если в качестве события A взять событие, состоящее в том, что выпало 2 очка.

Ответ на первый вопрос кажется естественным: $P(A|B) = 0$, поскольку 1 является нечетным числом.

Второй вопрос задачи уже не такой тривиальный. Если выпало четное число очков, то пространство элементарных исходов сузилось до множества B. Множество элементарных исходов состоит из 3-х элементов: выпало 2 очка, выпало 4 очка и выпало 6 очков. Причем только один из них благоприятный и состоит в том, что кость выпала стороной 2 кверху. Таким образом, искомая вероятность равняется $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

В общем случае можно доказать следующую теорему.

Теорема умножения. Пусть в пространстве элементарных исходов $\Omega = \omega_1, \ldots, \omega$ задано некоторое непустое событие $B = \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, $k \geqslant 1$. Пусть также задано другое событие A. Тогда вероятность $P(A|B)$ события A при условии, что событие B уже реализовалось можно определить следующим образом:

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B).$$

Док-во. Если событие B уже реализовалось, то B становится новым множеством элементарных исходов, а множеством благоприятных исходов станет множество $A \cap B$:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B| \frac{1}{|\Omega|}}{|B| \frac{1}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Здесь несколько раз было использовано определение вероятности. Из последнего уравнения следует требуемое тождество. Теорема доказана.

Замечание. Если множество $P(B)$ пустое, то по соглашению условную вероятность $P(A|B)$ полагают равной нулю.

3.2. Понятие независимости событий

Пусть в некотором пространстве элементарных исходов Ω заданы два события A и B. Условие того, что событие A не зависит от события B, имеет следующий вид:

$$P(A|B) = P(A).$$

Грубо говоря, знание о том, что произошло непустое событие B не даёт никакой новой информации о том, произошло ли событие A.

Более удобную формулировку условия независимости событий A и B можно получить с помощью теоремы умножения:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

То есть события A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Говорят, что $A_1, \ldots, A_k$ попарно независимы, если независимы друг относительно друга любые два события из этого множества.

Однако существует более сильное свойство независимости событий — независимость в совокупности. События $A_1, \ldots, A_k$ независимы в совокупности, если

$$\forall l \leqslant k \quad \forall i_1, \ldots, i_l \quad P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_l}).$$

Из совокупной взаимной независимости попарная независимость получается тривиальным образом. Однако, если события независимы попарно, то вовсе не обязательно, что они являются независимыми в совокупности.

Задача. Привести пример таких событий A_1, A_2, A_3, которые попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

3.3. Формула полной вероятности

Теорема. Пусть некоторое пространство элементарных событий Ω может быть представлено как объединение конечного числа непересекающихся подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Тогда для вероятности произвольного события $A \subseteq \Omega$ верна формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i).$$

Док-во. Исходя из свойств вероятности:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + (A \cap B_2) + \ldots + (A \cap B_k).$$

Требуемое утверждение может быть получено с помощью теоремы умножения $(A \cap B_i) = P(A \cap B_i)P(B_i)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + (A \cap B_2) + \ldots + (A \cap B_k) = \\ &= P(A \cap B_1)P(B_1) + P(A \cap B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)P(B_k). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Отступление. Раньше при голосовании использовались шары: если в определенного урну положили черный шар, то это значит голос «ПРОТИВ», а белый — «ЗА» данного кандидата.

Пример. Пусть даны две урны: в первой из них находятся 3 черных и 2 белых шара, а во второй — 1 черный и 3 белых. Из первой урны наугад достают два шара и кладут их внутрь второй урны. После этого шары во второй урне тщательно перемешиваются и из нее извлекается 1 шар. Найти вероятность $P(\bigcirc)$, что этот шар — белый.

В результате первого вытягивания реализуется одно из трех событий B_1, B_2, B_3. Событие $B_1 = \bigcirc\bigcirc$ состоит в том, что выпали два белых шара, $B_2 = \bullet\bullet$ — в том, что выпали два черных, а $B_3 = \bigcirc\bullet$ — в том, что выпал один белый и один черный шар.

Согласно классическому определению вероятности:

$$P(B_1) = \frac{1}{10}, \quad P(B_2) = \frac{3}{10}, \quad P(B_3) = \frac{6}{10}.$$

Если из первой урны были выбраны 2 белых шара, то во второй урне после перемешивания окажутся 5 белых и 1 черный шар. В этом случае вероятность вытянуть шар при условии, что произошло событие B_1 равно $P(A|B_1) = \frac{5}{6}$. Аналогично можно получить вероятности $P(A|B_2) = \frac{3}{6}$ и $P(A|B_3) = \frac{4}{6}$.

Согласно формуле полной вероятности, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{1}{10}\frac{5}{6} + \frac{3}{10}\frac{3}{6} + \frac{6}{10}\frac{4}{6}.$$

3.4. Формула Байеса

Другая важная на практике формула, связанная с формулой полной вероятности, это формула Байеса. Пусть события $B_1, \dots, B_k$ попарно не пересекаются и в объединении дают все множество элементарных исходов. Тогда вероятность события A по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i).$$

Часто бывает необходимо найти вероятность $(B_i|A)$ события B_i при условии, что событие A случилось.

Теорема. Вероятность $(B_i|A)$ события B_i при условии, что событие A случилось:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Док-во. Если применить теорему умножения двумя различными способами:

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i) = P(B_i|A)P(A),$$

то с учетом формулы полной вероятности можно получить требуемое выражение:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Утверждение доказано.

Пример. Студент решает задачу с k вариантами ответа. Если студент знает, как решать задачу, он дает правильный ответ. Если нет — может угадать с вероятностью $\frac{1}{k}$.

Какая вероятность $P(\text{Студент знал решение}|\text{Дан верный ответ})$, что студент знает решение задачи, при условии, что был дан правильный ответ.

Пусть $p \in [0, 1]$ — вероятность, что студент знает решение задачи. Событие B_1 соответствует ситуации, в которой студент знает решение задачи, а B_1 — не знает. Тогда:

$$P(B_1) = p, \quad P(B_2) = 1 - p, \qquad P(A|B_1) = 1, \qquad P(A|B_2) = \frac{1}{k}.$$

Теперь можно применить формулу Байеса:

$$P(B_1|A) = \frac{p}{p + \frac{1}{k}(1-p)}.$$