1. Схема испытаний Бернулли

1.1. Броски монеты со смещенным центром тяжести

Пусть вероятность того, что монета со смещенным центром тяжести при её броске на стол ложится кверху «решкой», равна $p =\in [0,1]$, а «орлом» — соответственно $q = 1-p$. Монета является идеальной в том смысле, что ни при каких условиях монета не падает на ребро.

Пусть также задано некоторое число $n \in \mathbb{N}$. Монету бросают n раз и каждый раз фиксируют, на какую сторону монета упала.

Успехом считается, если монетка падает кверху «решкой». В этом случае записывают единицу. А если монетка упала «орлом», пишут ноль, который обозначает неудачу. После n бросаний получается последовательность ω из 0 и 1:

$$\omega = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \{0,1\}.$$

Множество всех возможных последовательностей является пространством всех элементарных исходов:

$$\Omega : \{\omega(x_1, \dots, x_n), x_i \in \{0,1\}\}, \qquad |\Omega| = 2^n.$$

В отличие от классической схемы, различные исходы — получившиеся последовательности ω — это уже не равновероятные события. Тогда необходимо определить вероятность каждого такого элементарного исхода, то есть найти, с какой вероятностью $P(\omega = (x_1, \dots, x_n))$ возникает конкретная последовательность ω из нулей и единиц.

Так как различные броски монеты независимы, в выражении для вероятности появления конкретной последовательности их вероятности перемножаются. Поскольку единица в последовательности встречается $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ раз, ноль — $n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$,получается следующее выражение для искомой вероятности:

$$P(\omega = (x_1, \dots, x_n)) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot q^{n-\sum_{i=1}^n}.$$

В частном случае при $p = \frac{1}{2}$ формула упрощается:

$$P(\omega = (x_1, \dots, x_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n},$$

а вероятностное пространство сводится к классическому вероятностному пространству с $\Omega = 2^n$ исходами. Такой случай соотвествтует монете с несмещенным центром тяжести.

1.2. Вероятность получить k успехов в серии из n испытаний Бернулли

Пусть событие A состоит в том, что среди n испытаний Бернулли было ровно k успехов. Множество элементарных исходов, которые благоприятствуют реализации события, можно отождествить с самим событием, как и в классическом случае:

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\} \subseteq \Omega.$$

Таковыми являются последовательности из нулей и единиц, в которых количество единиц равняется k:

$$A\{\omega = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \dots, x_n = k\}.$$

Количество таких элементарных исходов m равняется количеству способов выбрать k позиции из n:

$$m = |A| = C_n^k.$$

Таким образом вероятность события A равна сумме по всем элементарным исходам, которые благоприятствуют событию A:

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega) = p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}.$$

1.3. Задача о пересечении случайных подмножеств

Пусть дано некоторое множество $\{1, 2, \dots, n\}$ с количеством элементов n. Случайное подмножество A этого множества можно извлечь по схеме Бернулли с n испытаниями:

$$\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow A$$

следующим образом: k-ый элемент множества войдет в подмножество A только в случае, если в результате k-го испытания будет успех. Известно, что в каждом испытании вероятность успеха равна p. Таким образом? вероятность того, что произвольный элемент исходного множества попадет в A равняется $P(i \in A) = p$. Независимо от A из исходного множества по той же схеме извлекают другое подмножество

$$\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow B.$$

Необходимо найти вероятность $P(A \cap B = \emptyset)$ того, что множества A и B имеют пустое пересечение.

Принцип решения таких задач следующий. Множествам A и B можно сопоставить последовательности из нулей и единиц длины n. Две данные последовательности можно расположить одна над другой. Тогда множества A и B будут иметь пустое пересечение, если не будет ситуации, когда под единицей в первой последовательности находится единица из второй. Вероятность того, что в конкретной позиции такая ситуация не наблюдается равна $1 - p^2$, а значит ввиду независимости всех испытаний искомая вероятность равна

$$P(A \cap B = \emptyset) = (1 - p^2)^n.$$

2. Задача о раскрасках (обобщение)

Задача, которая была решена в одном из предыдущих разделов, может быть обобщена следующим образом.

Теорема 1. Пусть даны произвольные множества $M_1, \dots, M_m$, причем мощность каждого из них $|M_i| = n$. Если число $m \leq 2^{n-1}$, то существует такая раскраска элементов множества $M_1, \dots, M_m$ в два цвета, при которой каждое из этих множеств неодноцветно.

Действитиельно, утверждение, доказанное ранее является частным случаем данной теоремы. Сама теорема доказана венгерскими математиками в 1961г (Эрдеш, Хайнал). Эта задача является отличным примером того, как тесно связанные чисто вероятностные и чисто комбинаторные задачи.

Теорема 2. Пусть $n \geq 100$, а $m \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}2^{n-1}$. Пусть также $M_1, \dots, M_m$ — любые n-элементные множества. Тогда существует раскраска в два цвета элементов $M_1 \cup \dots \cup M_m$, при которой все множества M_i неодноцветны.

Док-во. Доказательство данной теоремы основано на двухкратном применении схемы Бернулли.

Пусть введено обозначение:

$$x = x(n) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}.$$

Тогда значение m можно выразить следующим образом (достаточно доказать для случая равенства: при меньшем m раскраска тоже будет существовать):

$$m = x \cdot 2^{n-1}.$$

Теперь необходимо зафиксировать произвольные множества

$$M_1, \dots, M_m, \quad |M_i| = n$$

и обозначить элементы объединения всех этих множеств:

$$M_1 \cup \dots \cup M_m = \{1, 2, \dots, v\}.$$

Пусть выбрана случайная раскраска. Этот выбор будет происходить в два этапа.

Этап 1. Данный этап соотвествтует переписанной в терминах испытаний Бернулли классической схеме. То есть используется «симметричная монетка» $p = \frac{1}{2}$. Первый этап раскраски строится следующим образом: i-ый элемент множества $\{1, 2, \dots, v\}$ красится в красный цвет, если в i-ом испытании Бернулли выпадает «решка», а если «орел» — то в синий. Т.е. с вероятностью $p = \frac{1}{2}$ любой элемент независимо от других либо красный, либо синий.

Тогда можно ввести обозначение для множества всех элементов $\{1, 2, \dots, v\}$, которые в результате первого этапа оказались принадлежащими к одноцветным множествам M_i. Если правильно перекрасить элементы этого множества, то может получиться требуемая раскраска.

Этап 2. Пусть используется монета с шансом выпадения «решки» $p = p(n)$, который будет указан позднее из некоторых оптимальных соображений. Каждый элемент множества $\mathcal{D}$ теперь необходимо перекрасить с вероятностью p независимо от остальных элементов: если выпадает «решка», то очередной элемент множества $\mathcal{D}$ необходимо перекрасить, если же «орел» — необходимо оставить его текущий цвет.

Пусть теперь событие $\mathcal{F}$ состоит в том, что после двух этапов остались одноцветные множества M_i. Тогда достаточно показать, что $P(\mathcal{F}) < 1$ при правильном подборе значения $p = p(n)$.

Для фиксированного множества M_i есть три события, в результате которых это множество оказывается одноцветным после двух этапов раскраски.

A_i : множество M_i красное после 1-го этапа и красное после 2-го этапа.

A_i' : множество M_i красное после 1-го этапа и синее после 2-го этапа.

C_i : M_i неодноцветное после 1-го этапа и красное после 2-го этапа.

Тогда можно привести следующую оценку (удвоение было сделано, чтобы учесть симметричные приведенным события):

$$P(\mathcal{F}) \leq 2P(\cup_{i=1}^m (A_i \cup A_i \cup C_i)) \leq 2\sum_{i=1}^m (P(A_i) + P(A_i') + P(C_i)).$$

Для вероятностей событий A_i и A_i' верно следующее:

$$P(A_i) = \frac{1}{2^n} \cdot (1-p)^n, \qquad P(A_i') = \frac{1}{2^n} \cdot p^n.$$

Вероятность события C_i можно оценить следующим образом. Если выполнено событие C_i, то множество M_i было перекрашено на втором шаге, так как существует по крайней мере одно множество M_j, которое пересекается с M_i и является синим после первой раскраски.

$$C_i \implies \exists j \neq i : M_i \cap M_j \neq \emptyset \text{ и выполнено } B_{i,j},$$

которое заключается в том, что M_i — хорошее в 1-м этапе и красное во 2-ом, а M_j — синее в первом этапе и произвольное во втором. Это позволяет получить искому оценку для вероятности события C_i:

$$P(C_i) \leq P(\bigcup_{\substack{i \neq j: \\ M_i \cap M_j \neq \emptyset}} B_{i,j}) \leq \sum_{\substack{i \neq j: \\ M_i \cap M_j \neq \emptyset}} P(B_{i,j}).$$

Теперь необходимо оценить сверху $P(B_{i,j})$: пусть

$$h := |M_i \cap M_j| \geq 1$$

— мощность пересечения множеств M_i и M_j, которая по построению не меньше 1. Вероятность того, что все элементы из пересечения покрашены в первом этапе в синий цвет равна $\frac{1}{2^h}$, а множитель p^h отвечает тому, что при второй перекраске каждый элемент пересечения поменял свой цвет на противоположенный. Оставшиеся элементы множества M_j имеют вероятность $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-h}$ быть синими после первой покраски. Оставшиеся элементы множества M_i могут быть как красными на первом этапе, так и синими. Допустим какой-либо элемент из $x \in M_i \backslash M_j$ был красным на первом этапе, тогда вероятность того, что он — красный на втором этапе не превосходит $1/2$. Если $x \in M_i \backslash M_j$ был синим на первом этапе и стал красным на втором, то заведомо произошла перекраска. Этот случай реализуется с вероятностью $\frac{p}{2}$. В таком случае можно сделаеть требуемую оценку сверху:

$$P(B_{i,j}) \leq \frac{1}{2^h} \cdot p^h \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-h} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)^{n-h} = p^h (1+p)^{n-h} \cdot 2^{-h+h-n+h-n} =$$
$$= p^h (1+p)^{n-h} \cdot 2^{h-2n} \leq p(1+p)^{n-1} \cdot 2^{1-2n}.$$

Здесь было использовано свойство, что максимум выражения $p^h(1+p)^{n-h} \cdot 2^{h-2n}$ на множестве $h \leq 1$ достигается при $h = 1$.

Тогда можно вернуться к оценке вероятности события C_i

$$P(C_i) \leq m \cdot p(1+p)^{n-1} 2^{1-2n},$$

а после — к оценке вероятности события $\mathcal{F}$:

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{F}) \le 2\left(\sum_{i=1}^{m}(2^{-n}(1-p)^n + 2^{-n}p^n) + m\cdot p(1+p)^n\cdot 2^{1-2n}\right) =\\
= 2^{1-n}x\cdot 2^{n-1}((1-p)^n+p^n) + 2^{2-2n}\cdot x^2\cdot 2^{2n-2}\cdot p(1+p)^n =\\
= x(1-p)^n + xp^n + x^2p(1+p)^n.
\end{aligned}
$$

Остается только подобрать такое p, что $x(1-p)^n + xp^n + x^2p(1+p)^n < 1$. Если положить

$$
p = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n},
$$

то выполняеся следующая оценка для предыдущего выражения

$$
\begin{aligned}
&x(1-p)^n + xp^n + x^2p(1+p)^n \le\\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln n}{n}\cdot e^{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)} =\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\ln n}{n}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{3}} <\\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} < 1.
\end{aligned}
$$

Здесь было использовано условие на n для оценки второго слагаемого. Теорема доказана.