

---

---

# ЛЕКЦИЯ 7

---

## ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

### 1. Магнитный момент

Напомним, что **магнитным моментом** витка с током называется величина

$$\text{Mathfrak}M \equiv \vec{M}u \equiv \vec{P}_m = \frac{1}{c} I\vec{S},$$

где  $I$  — ток в витке, а направление вектора площади  $\vec{S}$  согласуется с направлением тока по правилу буравчика.

Возьмем очень малый виток с магнитным моментом  $\text{Mathfrak}M$ . Его поле аналогично полю электрического диполя (см. предыдущий семинар):

$$\vec{B} = \frac{3[\text{Mathfrak}M \vec{r}]}{r^5} - \frac{\text{Mathfrak}M}{r^3},$$

$$\vec{E} = \frac{3[\vec{p} \vec{r}]}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Кроме того, в учебнике Сивухина доказывается эквивалентность поля витка с током и малой магнитной стрелки. Поэтому под «магнитным диполем» часто подразумевают магнитную стрелку. В природе магнитным дипольным моментом обладают атом, ядро, электрон. Например, электрон, движущийся по круговой орбите, создает ток

$$I = \frac{q}{T} = -\frac{e \cdot \omega}{2\pi},$$

где  $T$  — период обращения электрона вокруг ядра,  $-e$  — его заряд.

#### Задача 5.18.

Квадратная рамка с длиной стороны  $l$  вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через одну из ее сторон. Угловая скорость рамки  $\omega$ . Рамка непроводящая и имеет



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

погонную плотностью заряда  $\kappa$  на каждый сантиметр. Вычислить магнитный момент этой рамки. Считать, что магнитное поле создается токами вращающихся с рамкой зарядов.

**Решение.**

Во вращении принимают участие три стороны рамки: одна вертикальная и две горизонтальные. Найдем их моменты по отдельности, а затем сложим.

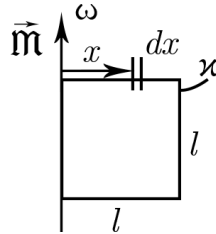


Рис. 7.1: К задаче 5.18.

Разобьем горизонтальный участок на отрезки длиной  $dx$  с зарядом  $dq = \kappa dx$  (рис. 7.1). Полный момент двух таких участков находится интегрированием:

$$\text{Mathfrak}M_1 = 2 \int \frac{\kappa dx \cdot \omega}{2\pi c} \cdot \pi x^2 = \frac{\kappa \omega l^3}{3c}.$$

Момент вертикальной стороны

$$\text{Mathfrak}M_2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{\kappa \omega l}{2\pi} \cdot \pi l^2 = \frac{\kappa \omega l^3}{2c}.$$

Магнитный момент всей рамки сонаправлен с  $\vec{\omega}$ :

$$\text{Mathfrak}M = \text{Mathfrak}M_1 + \text{Mathfrak}M_2 = \frac{5}{6} \frac{\kappa \vec{\omega} l^3}{c}.$$

**Задача 5.12.**

Длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока  $i$  согнут в виде подковы (полуокружности). Сечение соленоида  $S = \pi r^2$ , радиус полуокружности на оси соленоида  $R$ . Найти величину магнитного поля в центре этой полуокружности  $O$ .

**Решение.**

$$i = \frac{IN}{l}.$$

Выделим бесконечно тонкий кольцевой элемент катушки. Он обладает магнитным моментом  $d\text{Mathfrak}M$ , направленным вдоль оси катушки. Магнитное поле данного витка в точке  $O$ :

$$d\vec{B} = -\frac{d\text{Mathfrak}M}{r^3}.$$

Оно направлено противоположно  $d\text{Mathfrak}M$ . В силу симметрии вертикальная составляющая суммарного магнитного поля занулится, и останется только горизонтальная



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

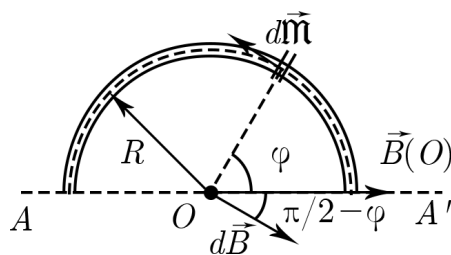


Рис. 7.2: К задаче 5.12.

вдоль оси  $AA'$  (см. рис. 7.2). Проинтегрируем по углу проекции  $dB$  на данное направление:

$$B = \int dB \sin \phi.$$

Магнитный момент

$$d\text{Mathfrak}\vec{M} = \frac{i \cdot R d\phi}{c} S.$$

Тогда

$$dB \sin \phi = \frac{d\text{Mathfrak}\vec{M}}{R^3} \sin \phi = \frac{i S d\phi}{c R^2} \sin \phi,$$

$$B_O = \frac{i S}{c R^2} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2i S}{c R^2} = \frac{2\pi i}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

## 2. Магнитное поле в присутствии вещества (магнетики)

Вещество состоит из атомов и молекул, которые, как правило, обладают магнитным моментом. Попадая в магнитное поле, атом стремится повернуться так, чтобы его магнитный момент сориентировался по полю. Этому препятствует тепловое движение. Поэтому обычно вещество слабо реагирует на внешнее магнитное поле.

Все вещества по своим магнитным свойствам делятся на **парамагнетики**, которые слабо намагничиваются в направлении магнитного поля, **диамагнетики**, ослабляющие магнитное поле (тоже незначительно), и **ферромагнетики**, которые намагничиваются очень сильно. Парамагнетики втягиваются в магнитное поле, диамагнетики — выталкиваются. Дело в том, что прецессия электронной орбиты в поле приводит к возникновению магнитного момента против внешнего поля.

**Теорема о циркуляции в веществе:**

$$\oint_L (\vec{B} d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} \left( \sum I_i + I_{\text{мол}} \right),$$

где  $I_{\text{мол}}$  — **молекулярные токи**. По аналогии с электричеством, где был введен вектор поляризации, избавимся от молекулярных токов в правой части выражения. Для этого вводится **вектор намагниченности**.

Представим себе намагниченный цилиндр длиной  $L$  с площадью основания  $S$ . На

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

молекулярном уровне магнитные моменты отдельных атомов такого цилиндра должны быть сонаправлены. Внутри все атомарные токи компенсируют друг друга, но по поверхности течет *фиктивный* и одновременно *эффективный молекулярный ток* (рис. 7.3). С ним можно обращаться как с обыкновенным током.

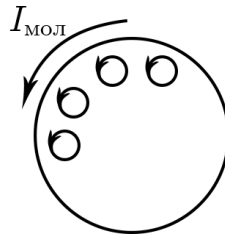


Рис. 7.3: Молекулярный ток и токи отдельных атомов.

**Намагниченностью**  $\text{MathcalI}$  называется магнитный момент единицы объема рассматриваемого цилиндра:

$$\text{MathcalI} = \frac{\text{MathfrakM}_{\text{мол}}}{V} = \frac{1}{c} \frac{I_{\text{мол}} \vec{S}}{V}.$$

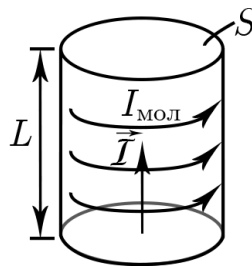


Рис. 7.4: К определению намагниченности.

Но  $V = S \cdot L$ , а  $I_{\text{мол}}/L$  — линейная плотность молекулярных токов:

$$\text{MathcalI} = \frac{i_{\text{мол}}}{c} \vec{l},$$

где  $|\vec{l}| = 1$ . Отсюда следует, что для цилиндра на рис. 7.4

$$i_{\text{мол}} = c(\text{MathcalI} \vec{l}).$$

Эта формула применима и в общем случае, для косоугольного цилиндра, когда векторы  $\text{MathcalI}$  и  $\vec{l}$  не сонаправлены. Для него получается выражение

$$I_{\text{мол}} = c \oint_L (\text{MathcalI} \vec{dl}).$$

Подстановка его в теорему о циркуляции дает

$$\oint (\vec{B} - 4\pi \text{MathcalI}) \vec{dl} = \frac{4\pi}{c} \sum I_i,$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

где  $I_i$  — реальные токи. **Напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$**  называется величина

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \text{Mathcal} \vec{I}.$$

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$ :**

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I_i.$$

Заметим, что размерность величин  $H$ ,  $\text{Mathcal} I$ ,  $B$  одинаковая. Проведем аналогию с электростатикой:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{D} - 4\pi \vec{P}, \\ \vec{P} &= \alpha \vec{E}, \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \epsilon &= 1 + 4\pi\alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  — поляризуемость,  $\vec{E}$  — вектор электрической индукции. Из теоремы Гаусса для вектора  $\vec{D}$  получалось граничное условие

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность свободных зарядов. Граничное условие для поля  $\vec{E}$ :

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Аналогичные формулы для магнитного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi \text{Mathcal} \vec{I}, \\ \text{Mathcal} \vec{I} &= \kappa \vec{H}, \\ \vec{B} &= Mu \vec{H}, \\ Mu &= 1 + 4\pi\kappa, \end{aligned}$$

где  $\kappa$  — магнитная восприимчивость,  $Mu$  — магнитная проницаемость среды.

Это **материальные связи**. Перейдем к граничным условиям. Электростатическое поле **потенциально**, а магнитное, в отличие от него, **вихревое (соленоидальное)**. Это означает, что зарядов, создающих магнитное поле, не существует, и его силовые линии самозамкнуты. Хотя есть очень редкие примеры, когда силовые линии представляют собой бесконечные спирали, которые никогда не замыкаются (два перпендикулярных провода с током). Но и в этом случае нет точки начала (или конца) силовой линии. Теорема Гаусса для вектора  $\vec{B}$  примет вид  $\text{div} \vec{B} = 0$ , и граничное условие запишется как

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Граничное условие для поля  $\vec{H}$ :

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i,$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

где  $i$  — линейная плотность реальных токов.

### Задача 6.3.

Бесконечный ферромагнитный слой вещества намагничен, причем его вектор намагниченности направлен перпендикулярно плоскости слоя (рис. 7.5). Найти поля  $B$  и  $H$  вне и внутри слоя.

#### Решение.

По теореме о циркуляции поле  $B$  создается реальными и фиктивными токами. Реальных токов (проводимости) в рассматриваемом магнетике нет, а молекулярные полностью скомпенсированы (см. рис. 7.3). Поэтому

$$\begin{aligned} B_{\text{вне}} &= B_{\text{внутри}} = 0, \\ H_{\text{вне}} &= B_{\text{вне}} = 0, \\ \vec{H}_{\text{внутри}} &= \vec{B}_{\text{внутри}} - 4\pi \text{Mathcal} \vec{I} = -4\pi \text{Mathcal} \vec{I}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это не противоречит граничным условиям.



Рис. 7.5: К задаче 6.3.

### Задача 6.4.

Бесконечный ферромагнитный слой вещества намагничен параллельно плоскости слоя (рис. 7.6). Найти поля  $B$  и  $H$  вне и внутри слоя.

#### Решение.

В данном случае молекулярные токи текут по поверхности. Снаружи такие токи поля не создают:

$$B_{\text{вне}} = H_{\text{вне}} = 0.$$

Внутри

$$B_{\text{внутри}} = \frac{i}{c} \Omega = \frac{4\pi i}{c} = 4\pi \text{Mathcal} I.$$

Отсюда

$$H_{\text{внутри}} = 0.$$

Проверка граничных условий:  $H \equiv 0$ ,  $B_n = 0$ .

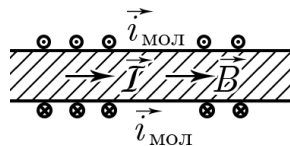


Рис. 7.6: К задаче 6.4.

Для решения данной задачи с помощью теоремы о циркуляции нужно выбрать произвольный контур, по которому удобно считать циркуляцию. Рассмотрим сначала плоскость с поверхностным током  $i$  и выберем прямоугольный контур, перпендикулярный



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

току (рис. 7.7). Поле  $B$  над плоскостью однородно, параллельно плоскости, а его направление определяется по правилу буравчика. Теорема о циркуляции:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = Bl_1 + 0 + Bl_1 + 0 = 2Bl_1 = \frac{4\pi}{c} il_1,$$

$$B = \frac{2\pi}{c} i.$$

Далее складываются поля двух плоскостей.

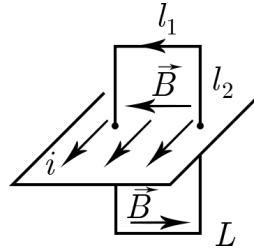


Рис. 7.7: Поле плоскости с током.

### Задача 6.5.

Рассматривается длинный цилиндр с «вмороженной» намагниченностью вдоль его оси  $\vec{I}$ . Длина цилиндра  $2l$ , диаметр  $2r$ ,  $l \gg r$ . Точка  $A$  находится у верхнего торца, точка  $C$  на середине длины, как показано на рис. 7.8. Найти отношение  $B_A/B_C$ . Найти также поле  $B_A$ .

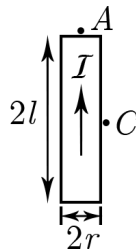


Рис. 7.8: К задаче 6.5.

### Решение.

Магнитное поле создается молекулярными токами, текущими по поверхности цилиндра, как в соленоиде. Намагниченность

$$I = \frac{i_{\text{мол}}}{c}.$$

Поле в точке  $A$ :

$$B_A = \frac{i}{c} \cdot \Omega_A$$

Телесный угол  $\Omega_A$  равен  $2\pi$  за вычетом угла, под которым из точки  $A$  виден дальний торец цилиндра:

$$\Omega_{\text{дно}} = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left( 1 - \frac{2l}{\sqrt{(2l)^2 + r^2}} \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r/(2l))^2}} \right) \approx$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

$$\approx 2\pi \left( 1 - \left( 1 - \frac{r^2}{2(2l)^2} \right) \right) = 2\pi \frac{r^2}{8l^2},$$

$$\Omega_A = 2\pi - \Omega_{\text{дно}} = 2\pi \left( 1 - \frac{r^2}{8l^2} \right) \approx 2\pi.$$

Искомое поле в точке  $A$ :

$$B_A \approx \frac{2\pi i_{\text{мол}}}{c}.$$

Для нахождения поля в точке  $C$  воспользуемся граничными условиями:

$$H_{C\tau} = H_{C'\tau},$$

где  $C'$  — точка внутри цилиндра, близкая к  $C$ . В силу малого сечения цилиндра поле во всем сечении приблизительно одинаково, в частности, оно равно полю в центральной точке  $C''$  цилиндра (рис. 7.9). Тогда

$$B_C = H_C = H_{C'} \approx H_{C''}.$$

$$H_{C''} = B_{C''} - 4\pi \text{Mathcal}I.$$

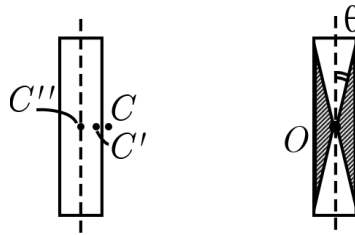


Рис. 7.9: К решению задачи 6.5.

Поле  $B_{C''}$  находится по аналогии с полем  $B_A$ :

$$B_{C''} = \frac{i_{\text{мол}}}{c} \Omega_O = \text{Mathcal}I \Omega_O,$$

$$\begin{aligned} \Omega_O &= 4\pi - 2 \cdot 2\pi(1 - \cos \theta) = 4\pi \cos \theta = 4\pi \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} = 4\pi \frac{1}{\sqrt{1 + (r/l)^2}} \approx \\ &\approx 4\pi \left( 1 - \frac{r^2}{2l^2} \right), \end{aligned}$$

$$B_C = \text{Mathcal}I \cdot 4\pi \left( 1 - \frac{r^2}{2l^2} \right).$$

Отсюда

$$H_{C''} = B_{C''} - 4\pi \text{Mathcal}I = 4\pi \left( 1 - \frac{r^2}{2l^2} \right) \text{Mathcal}I - 4\pi \text{Mathcal}I = -2\pi \text{Mathcal}I \frac{r^2}{l^2}.$$

Отношение полей:

$$\frac{B_A}{B_C} = \frac{l^2}{r^2}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

На рис. 7.10 представлены конфигурации полей  $B$  и  $H$ . Поле  $B$  непрерывно и выглядит так же, как поле диполя. Поле  $H$  снаружи совпадает с полем  $B$ , но внутри вследствие вычитания  $4\pi\text{Mathcal}I$  произойдет его переворот. Возле боковой поверхности цилиндра поле  $H$ , таким образом, будет непрерывно. Это полная аналогия электрического поля  $E$ , которое разрывается на торцах цилиндра из-за наличия поляризационных зарядов, и непрерывного вектора индукции  $D$ .

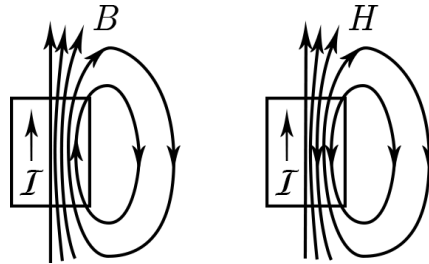


Рис. 7.10: Поля  $B$  и  $H$  намагниченного цилиндра.

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)