ЛЕКЦИЯ 2

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

На дополнительных семинарах будет рассматриваться методика решения задач по механике.

Рассмотрим движение тела по некоторой траектории. Здесь τ — **тангенциальный вектор**, n — **вектор нормали**, направленный в сторону кривизны.

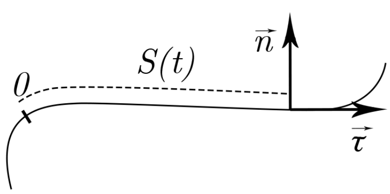

Рис. 2.1

В такой системе координат:

$$\vec{v} = v\vec{\tau};\ v = \frac{ds}{dt} \text{ — **скалярная скорость**,}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{n}} + \vec{a}_\tau \text{ — **полное ускорение**,}$$

$\vec{a}_{\text{n}}$ — **нормальное ускорение**, $\vec{a}_{\,\tau}$ — **тангенциальное ускорение**.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt};\ a_{\text{n}} = \frac{v^2}{\rho},\ \rho \text{ — **радиус кривизны** траектории в этой точке;}$$

$$a = \sqrt{a_{\text{n}}^2 + a_\tau^2}.$$

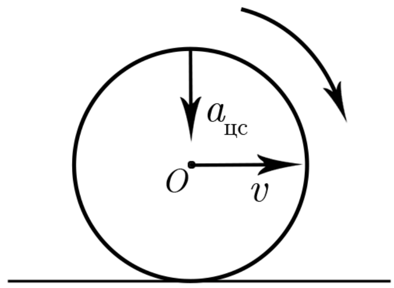

Рис. 2.2: Вращение колеса без проскальзывания

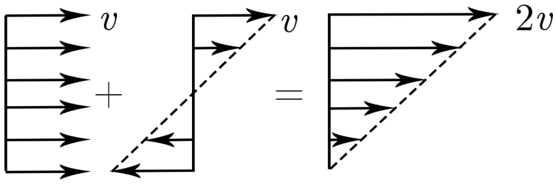

Рис. 2.3: Годограф скоростей

Здесь v — **поступательная скорость** оси колеса, точка O — **мгновенная ось вращения**.

Задача № 1.16 Колесо радиуса R равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью v. Найти координаты x и y произвольной точки A на ободе колеса, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса ϕ, полагая, что при $t = 0$, $\phi = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

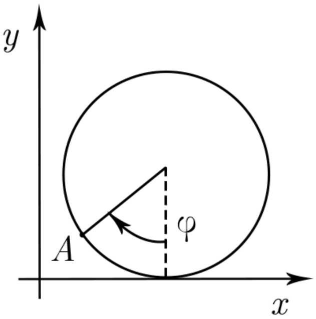

Рис. 2.4

Пусть R — длина дуги. Тогда:

$$y(t) = R(1 - \cos\phi) = R(1 - \cos\omega t) = R(1 - \cos\frac{v}{R}t),$$

$$x(t) = R\phi - R\sin\phi = R\frac{v}{R}t - R\sin\frac{v}{R}t = vt - R\sin\frac{v}{R}t.$$

Задача № 1.13 Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Найти горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту v_y этой скорости и модуль полной скорости для этой же точки.

Вектор полной скорости перпендикулярен радиус-вектору от этой точки до мгновенной оси вращения:

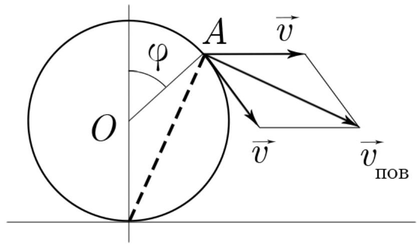

Рис. 2.5

$$v_{\text{x}}^{\text{полн}} = v + v\cos\phi = 2v\cos^2\frac{\phi}{2};$$

$$v_{\text{y}} = -v\sin\phi;$$

$$v_{\text{полн}} = \sqrt{v_{\text{x}}^2 + v_{\text{y}}^2} = v\sqrt{4cos^4\frac{\phi}{2} + 4\sin^2\frac{\phi}{2}\cos^2\frac{\phi}{2}} = 2v\cos\frac{\phi}{2}.$$

Задача № 1.17 Найти длину полного пути каждой точки обода колеса между двумя её последовательными касаниями полотна дороги.

Какую траекторию описывает точка на ободе колеса?

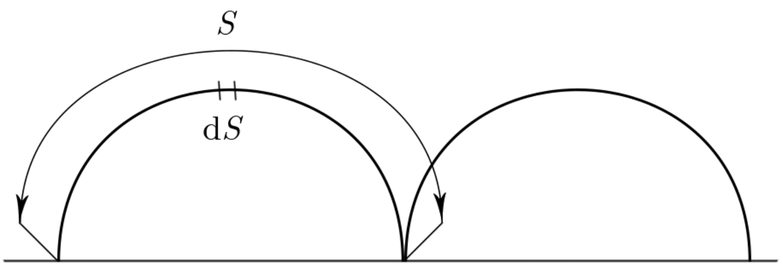

Рис. 2.6: Циклоида

Учитывая, что угол ϕ отсчитывается от вертикального диаметра,

$$v_{полн} = 2v\cos\frac{\phi}{2} = \frac{ds}{dt} = 2\underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\omega}R\cos\frac{\phi}{2} \quad\Rightarrow\quad ds = 2R\cos\frac{\phi}{2}d\phi.$$

Маленькое приращение длины дуги выражается через бесконечно малый поворот на колесе, значит полную длину дуги найдём интегрированием:

$$S = \int_0^{\text{S}} dS = 2R\int \cos\frac{\phi}{2}d\phi.$$

Угол ϕ измеряется от 0 до 2π, за это время косинус меняет свой знак. Так как кривая симметрична, посчитаем длину половины дуги и умножим на 2:

$$S = 2 \cdot 2R \int\limits_0^\pi \cos\frac{\phi}{2} d\phi = 8R \sin\frac{\phi}{2}\Big|_0^\pi = 8R.$$

Задача № 1.14 Найти выражение для радиуса кривизны циклоиды в её вершине.

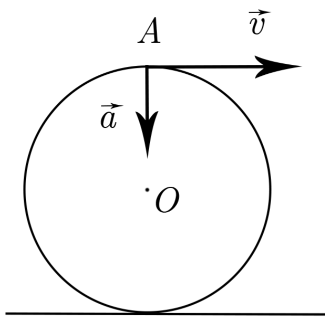

Рис. 2.7

$$a = \frac{v^2}{R} = a_\text{n} = \frac{v^2_\text{полн}}{\rho} = \frac{(2v)^2}{\rho},$$

$$\rho(A) = 4R.$$

Рассмотрим другую точку:

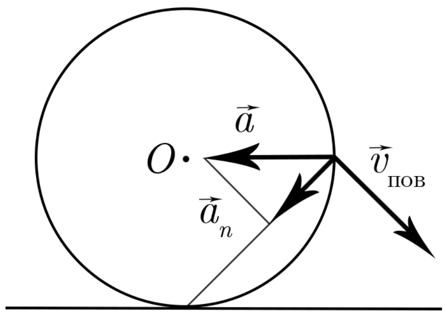

Рис. 2.8

$$v_\text{полн} = \sqrt{2}v,$$

$$a_\text{n} = a\cos 45^\circ \text{ проекция — нормальная компонента скорости},$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2_\text{полн}}{\rho} = \frac{(\sqrt{2}v)^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\rho = 2\sqrt{2}R.$$

Условия равновесия тела:

1. Сумма всех реальных сил, действующих на тело, равна нулю.

2. Сумма моментов сил равна нулю.

Это хорошо проиллюстрировать на примере кирпича, лежащего на наклонной плоскости.

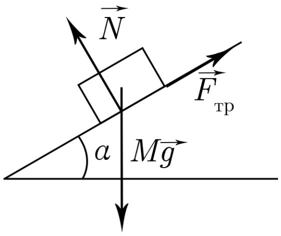

Рис. 2.9

Сила реакции опоры — распределённая, то есть она распределена равномерно, если $\alpha = 0$, и неравномерно, если $\alpha \neq 0$.

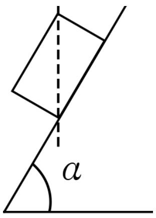

Рис. 2.10

При некотором угле α положение равновесия кирпича становится неустойчивым: кирпич опрокидывается.

Задача № 2.56 (Задача Эйлера) На врытый в землю столб навита верёвка. За один конец верёвки тянут с силой $F = 10000H$. Какую силу надо приложить к другому концу верёвки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения верёвки о столб $k = \frac{1}{\pi}$. Верёвка обвита вокруг столба два раза.

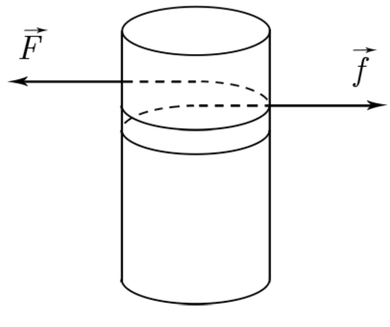

Рис. 2.11

Возьмём столб в среде и рассмотрим равновесие кусочка верёвки:

Выделим бесконечно узкий сектор $d\alpha$. Верёвка натянута, значит, к концам A и B куска на секторе $d\alpha$ приложены силы $T(\phi)$ и $T(\phi + d\phi)$ соответственно. Небольшая разница в этих силах компенсируется силами трения:

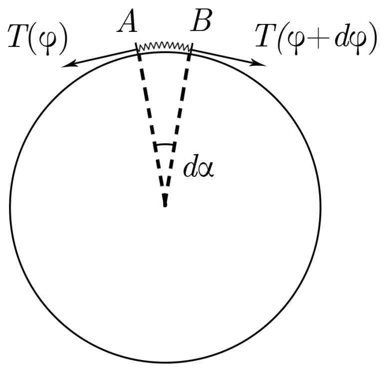

Рис. 2.12

$$T(\phi + d\phi) - T(\phi) = dT = F_{\text{тр}} = kN \text{ — условие равновесия,}$$

где N — сила нормального давления на столб.

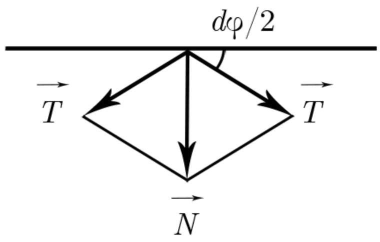

Рис. 2.13

Для удобства сведём силы натяжения в одну точку. Векторная сумма этих трёх сил направлена вниз и является как раз силой нормального давления.

$$N = 2T\frac{d\phi}{2} = Td\phi; \ \sin\phi = \operatorname{tg}\phi, \text{ так как углы бесконечно малы.}$$

Подставив полученный результат в уравнение равновесия, получим:

$$\int\limits_{\text{f}}^{\text{F}} \frac{dT}{T} = k\int\limits_{0}^{4\pi} d\phi = \frac{1}{\pi}\cdot 4\pi = 4,$$

$$\ln F - \ln f = \ln\frac{F}{f} = 4,$$

$$f = \frac{F}{\text{e}^4} = \frac{10000\ H}{54,6} \approx 18,3\ H.$$

Задача № 2.23 Плоская шайба массы M лежит на тонкой пластине на расстоянии L от её края. Пластину с большой постоянной скоростью выдергивают из-под шайбы, которая при этом практически не успевает сместиться. Найти зависимость $x(t)$ расстояния, проходимого шайбой, от времени её скольжения по поверхности стола. На какое расстояние в итоге сместится шайба? Считать, что сила трения между шайбой и доской, шайбой и столом прямо пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности γ.

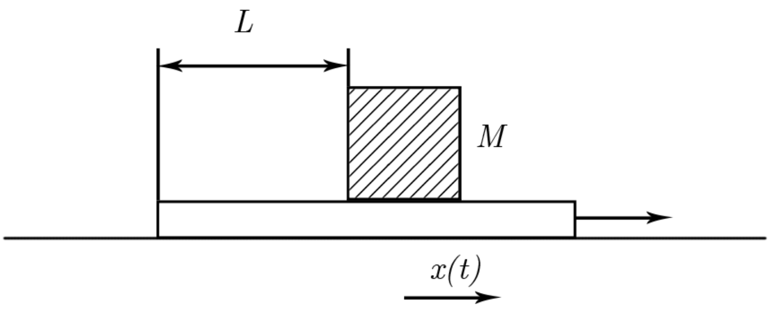

Рис. 2.14

Пренебрежём небольшим сдвигом шайбы, произошедшим во время выдёргивания. Но шайба приобрела скорость, значит, дальше она будет замедленно двигаться по поверхности стола.

Пусть τ — время рывка. Будем считать, что пластину двигали с постоянной скоростью $v_{\text{пл}}$:

$$\tau = \frac{L}{v_{\text{пл}}}.$$

Шайба приобретала скорость в результате взаимодействия с пластиной, следовательно, по второму закону Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = \frac{dp}{dt},$$

$$F_{\text{тр}}\tau = \Delta p = M v_0, \text{ где } v_0 \text{ — скорость, приобретённая шайбой,}$$

$$V_0 = \frac{F_{\text{тр}}\tau}{M} = \frac{\tau}{M}\cdot\gamma v_{\text{пл}} = \frac{L}{v_{\text{пл}}}\cdot\frac{\gamma v_{\text{пл}}}{M} = \frac{L\gamma}{M}.$$

Запишем уравнение движения (на основе второго закона Ньютона):

$$M\frac{dv}{dt} = -\gamma v \;\Rightarrow\; M\int\limits_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v} = -\gamma\int\limits_0^{\mathrm{t}} dt,$$

$$v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{\frac{-\gamma t}{M}} \text{ — закономерность изменения скорости,}$$

$$x(t) = \int\limits_0^t v(t)dt = \int\limits_0^{\mathrm{t}} v_0\,\mathrm{e}^{\frac{-\gamma t}{M}}\,dt = \frac{L\gamma}{M}\left(-\frac{M}{\gamma}\right)\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\frac{-\gamma t}{M}}\,d\left(-\frac{\gamma t}{M}\right) = L\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-\gamma t}{M}}\right).$$

$$x(\infty) = L \text{ — расстояние, после которого шайба остановится.}$$

Задача № 2.36 Воздушный шар имеет сферическую оболочку радиуса R, которая заполнена газом плотности $\rho_{\text{г}}$. Плотность воздуха — $\rho_{\text{в}}$; вязкость — η; масса оболочки, оснастки и гондолы в сумме равна M. Шар снижается с постоянной скоростью. Чтобы её уменьшить, в некоторый момент времени за борт выбрасывается без начальной скорости мешок с песком массой m. Определить скорость шара v как функцию времени. Примечание: для решения задачи воспользоваться гидродинамической **формулой Стокса**, выражающей силу сопротивления, испытываемую шариком, движущимся в вязкой жидкости: $f = 6\pi r v \eta$.

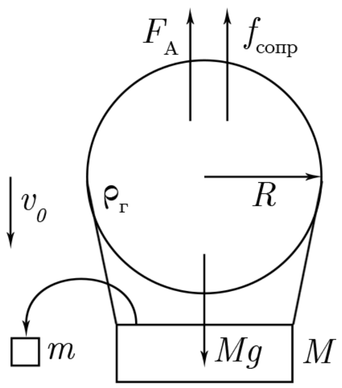

Рис. 2.15

Так как снижение идёт с постоянной скоростью, выполнено условие равновесия:

$$Mg + \rho_г g V = \rho_в g V + 6\pi\eta R v_0,$$

$$v_0 = \frac{Mg + Vg(\rho_г - \rho_в)}{6\pi\eta R},$$

После выбрасывания m:

$$(M-m)\frac{dv}{dt} = (M-m)g + V\rho_г g - V\rho_в g - 6\pi\eta R v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{g + \frac{Vg(\rho_г - \rho_в)}{M-m}}_{A} - \underbrace{\frac{6\pi\eta R}{M-m}}_{B} v = A - Bv,$$

$$\int\limits_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{A - Bv} = \int\limits_0^t dt \;\Rightarrow\; -\frac{1}{B}\ln\left|\frac{A - Bv}{A - Bv_0}\right| = t,$$

$$v(t) = \frac{A}{B} - \left(\frac{A}{B} - v_0\right)\mathrm{e}^{-Bt} = \frac{(M-m)g - Vg(\rho_г - \rho_в)}{6\pi\eta R} + \frac{mg}{6\pi\eta R}\exp\left(\frac{-6\pi\eta R}{M-m}t\right) \text{ — ответ,}$$

причём $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.