ЛЕКЦИЯ 4

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1. Законы сохранения

Ключевыми понятиями в этом разделе являются законы сохранения энергии и импульса.

Закон сохранения импульса (ЗСИ) работает в замкнутых системах.

Закон сохранения энергии (ЗСЭ) выполняется в консервативных системах.

Консервативные системы — это системы, в которых присутствуют только консервативные силы, т. е. силы, зависящие только от координат. В поле консервативных сил можно ввести **потенциальную энергию**, и тогда будет выполняться ЗСЭ (П — потенциальная энергия, K — кинетическая энергия):

$$\Pi + K = \text{const}.$$

Примеры полей:

1. Гравитационное поле.
2. Электрическое поле.
3. Поле сил упругости:
$$F = \frac{kx^2}{2}.$$
4. Поле центробежных сил (сил инерции). Эти силы действительно являются потенциальными, поскольку зависят только от расстояния до оси.

Введём понятие **центра инерции (центра масс)** системы материальных точек:

$$\vec{r}_\text{c} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}.$$

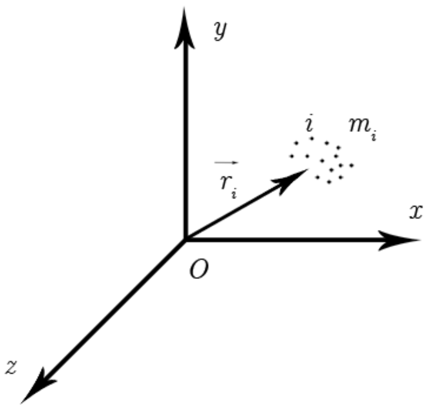


Рис. 4.1

Но эти точки движутся, поэтому можно ввести скорость центра масс системы.

$$\vec{v}_\text{c} = \dot{\vec{r}}_\text{c} = \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum m_i}.$$

Ускорение центра масс:

$$\ddot{\vec{r}}_\text{c} = \frac{\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i}{\sum m_i} == \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} \quad \Rightarrow \quad M\ddot{\vec{r}}_\text{c} = \sum F_i^\text{внеш} = \vec{R}_\text{внеш} \text{ — равнодействующая сила.}$$

Сумма сил расписывается через внутренние и внешние силы:

$$\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum F_{ik} + F_i^\text{внеш}.$$

Из-за того, что все внутренние силы являются парными,

$$\sum F_{ik} = 0.$$

Тогда:

$$\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = F_i^\text{внеш}.$$

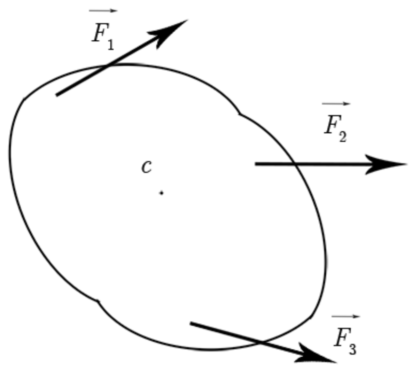


Рис. 4.2

Для описания движения центра масс следует сложить все силы, приложенные к твердому телу. У каждой силы есть момент относительно центра масс.

2. Задачи

Задача 4.22.

Человек прошел вдоль по лодке массой M путь l. Каковы при этом будут смещения

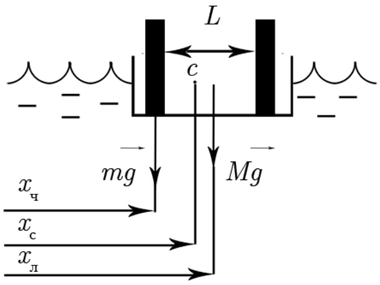


Рис. 4.3

лодки ρ_1 и человека ρ_2 относительно воды? Масса человека: m.

Решение.

Поскольку к системе не было приложено никаких внешних сил, то положение её центра масс не изменилось.

Зададим координаты тел. $x_с$, $x_ч$, $x_л$ — старые координаты, $x'_с$, $x'_ч$, $x'_л$ — после передвижения человека

$$(M+m)x_с = Mx_л + mx_ч = Mx'_л + mx'_ч.$$

$x_с$ — координата центра масс, $x_л$ — координата центра масс лодки, $x_ч$ — координата человека.

$$M(x'_л - x_л) + m(x'_ч - x_ч) = 0.$$

$$\begin{cases} M\rho_1 + m\rho_2 = 0, \\ \rho_2 = \rho_1 + l. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_1 = -\frac{ml}{M+m}, \\ \rho_2 = \frac{Ml}{m+M}. \end{cases}$$

Задача 4.25.

На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно l — длина пробирки. Нить пережигают, и муха за время падения перемещается со дна в верх пробирки. Определить время, по истечению которого нижний конец опустится на стол.

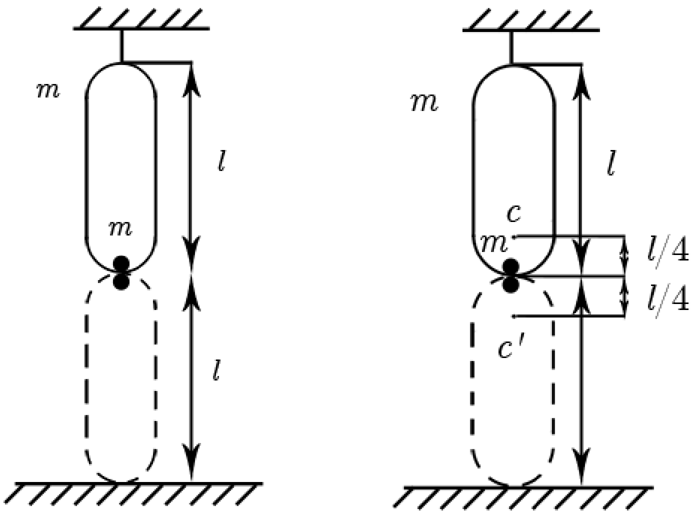


Рис. 4.4

Решение.

Внутренние силы между мухой и пробиркой парные и замкнутые. Центр масс пробирки: $\frac{3l}{2}$, центр масс мухи: l, центр масс пробирки после падения: $\frac{l}{2}$, центр масс мухи после падения: l.

Центр масс системы: $\frac{5l}{4}$, центр масс системы после падения: $\frac{3l}{4}$.

$$\rho_{ц.\ м.} = \frac{5l}{4} - \frac{3l}{4} = \frac{l}{2} = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача 4.40.

На проволочное кольцо радиуса R надето маленькое колечко. Коэффициент трения колечка о проволоку: $k = \dfrac{1}{4\pi}$. В момент времени $t = 0$ колечку сообщили скорость $v_0 = 10$ м/с относительно проволоки. Считая проволоку неподвижной, определить, какую скорость будет иметь колечко, совершив два полных оборота по кольцу. Силу тяжести не учитывать.

Решение.

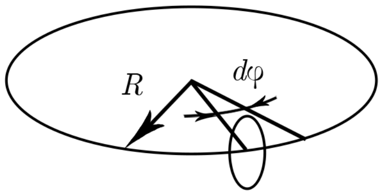


Рис. 4.5

Изменение киетической энергии равно работе сил трения.

$$k\frac{mv^2}{R}Rd\phi = \delta F_{\text{тр}} - dK = -d\frac{mv^2}{2} = -mvdv.$$

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int\limits_{0}^{4\pi} d\phi.$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -k4\pi = -1,$$

$$v = \frac{v_0}{\mathrm{e}} = \frac{10}{2,7} \approx 3,7 \text{ м/с}.$$

Задача 4.45.

Однородная доска длиной L горизонтально лежит на двух одинаковых цилиндрических опорах, вращающихся в противоположных направлениях. В силу различных случайных толчков доска выходит из положения равновесия. Каков будет характер ее дальнейшего движения? Найти скорость v, которую приобретет доска в момент времени, когда один из ее концов соскользнет с опоры, если $L = 2l = 4$ м. Коэффициент трения между доской и опорой: $k = 0,5$.

Решение.

Если центр масс сместится, поменяется реакция опоры.

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = mg, \\ mg\left(\frac{l}{2} + x\right) = N_1 l, \end{cases} \quad \begin{cases} F_{\text{тр }1} = KN_1, \\ F_{\text{тр }2} = KN_2, \end{cases} \quad \begin{cases} N_1 = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right), \\ N_2 = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right). \end{cases}$$

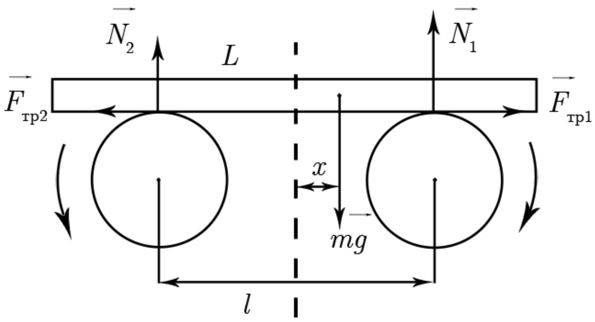


Рис. 4.6

Уравнение движения доски:

$$m\frac{dv}{dv} = F_{\text{тр } 1} - F_{\text{тр } 2} = kmg\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right) - kmg\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right) = \frac{2kmgx}{l},$$

$$\ddot{x} - \frac{2kg}{l}x = 0.$$

Полученное уравнение не является колебательным, т. к. в нем фигурирует знак «-».

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2kg}{l}x,$$

$$dx\frac{dv}{dt} = \frac{2kg}{l}xdx.$$

$$\int\limits_0^r vdv = \frac{2kg}{l}\int\limits_0^{\frac{l}{2}} xdx,$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2kg}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{kgl}{2}} = 2,2 \text{ м/с}.$$

Также есть еще один способ получения этого дифференциального уравнения:

$$\delta A = (F_{\text{тр } 1} - F_{\text{тр } 2})dx = \frac{2kmg}{l}xdx = dK = mvdv,$$

$$vdv = \frac{2kg}{l}xdx.$$

Задача 2.24.

Хоккейная шайба падает на лёд со скоростью v_0 под углом α и продолжает скользить по льду. Найти скорость скольжения как функцию времени, если коэффициент трения шайбы об лёд K не зависит от скорости и силы давления шайбы об лёд.

Решение.

Шайба после удара не подпрыгивает. Значит, гасится вертикальная составляющая импульса (удар неупругий).

$$F = \frac{dp}{dt},$$

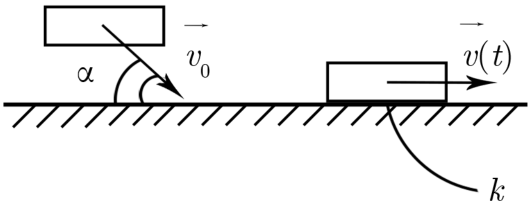


Рис. 4.7

$$\int_0^\tau N\,dt = \Delta(mv_y) = 0 - mv\sin\alpha$$

— импульс силы реакции опоры льда.

$$\int_0^\tau F_{\text{тр}}\,dt = k\int_0^\tau N\,dt = \Delta(mv_x) = mv_x^{\text{конеч}} - mv_x^{\text{нач}} = mv_{\text{пол}} = mv_0\cos\alpha = -kmv_0\sin\alpha.$$

$$v_{\text{пол}} = v_0\cos\alpha - kv_0\sin\alpha.$$

Скольжение:

$$m\dot{v} = -kmg,$$

$$v(t) = v_{\text{нач}} - kgt = v_0\cos\alpha - k(v_0\sin\alpha + gt).$$

Задача 1.

Полусфера массой $M = 100$ грамм лежит на столе. С её верхней точки без трения соскальзывает тело массой $m = 10$ г. Из-за трения между полусферой и поверхностью стола движение полусферы начинается только при угле $\alpha = 6^\circ$. Найти коэффициент трения сферы о стол.

Решение.

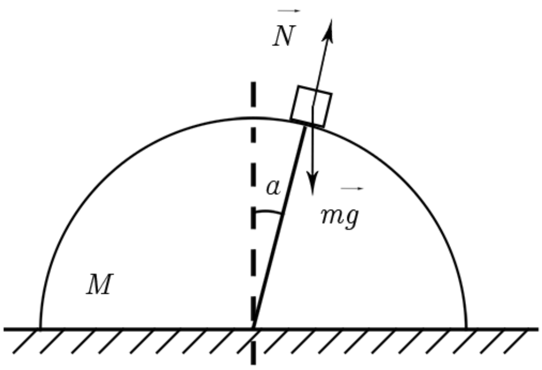


Рис. 4.8

Центростремительная сила:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N.$$

Приобретенная кинетическая энергия:

$$\frac{mv^2}{2} = mgr(1 - \cos\alpha).$$

$$\frac{mv^2}{R} = 2ng(1 - \cos\alpha) = mg\cos\alpha - N \quad \Rightarrow \quad N = mg(3\cos\alpha - 2).$$

Движение начинается, когда $N\sin\alpha = kMg + kN\cos\alpha$:

$$k = \frac{N\sin\alpha}{Mg + N\cos\alpha} = \frac{m(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha}{M + m(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha}.$$

Считаем угол α малым.

$$k \approx \frac{m}{m+M}\alpha \approx 0,01.$$

Задача 2.32.

Парусный буер массой $M = 100$ кг начинает движение под действием ветра, дующего со скоростью $v = 10$ м/с. Высчитать время, через которое мощность, отбираемая буером у ветра, будет максимальна, если сила сопротивления паруса ветру пропорциональна квадрату относительной скорости между буером и ветром с коэффициентом пропорциональности $k = 0,1$ кг/м. Трением пренебречь.

Решение.

$$m\frac{du}{dt} = k(v-u)^2.$$

$$\int\limits_0^{u(t)} \frac{du}{(v-u)^2} = \frac{k}{m}\int\limits_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\int\limits_0^{u(t)} \frac{d(v-u)}{(v-u)^2} = \int\limits_{u(t)}^0 \frac{d(u-v)}{(u-v)^2} = -\frac{1}{v-u}\Big|_{u(t)}^0 =$$

$$= -\frac{1}{v} + \frac{1}{v - u(t)} = \frac{u(t)}{v(v-u(t))} = \frac{k}{m}t.$$

$$u(t) = \frac{kv^2t}{m + kvt}.$$

Мощность:

$$N = F_{\text{сопр}}u = k(v-u)^2u.$$

$$N' = k(uv^2 - 2u^2v + u^3)' = 0.$$

$$u^2 - 4uv + 3u^2 = 0,$$

$$u = \frac{1}{3}v \pm \sqrt{\frac{4}{9}v^2 - \frac{3}{9}v^2} = \begin{cases} \frac{1}{3}v, \\ v \text{ — не подходит.} \end{cases}$$

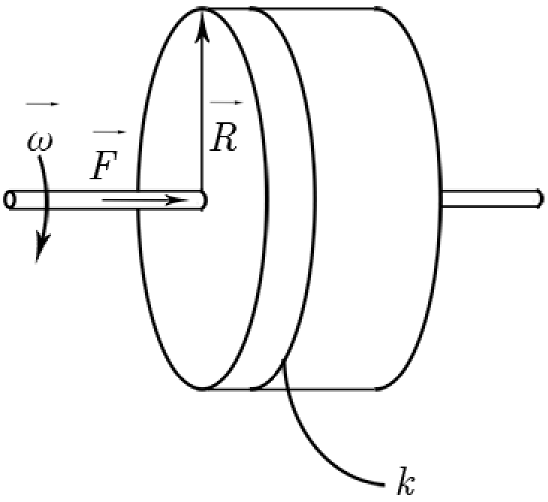
$$u = \frac{1}{3} = \frac{kv^2\tau}{m + kv\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m}{2kv} = 50 \text{ с}.$$

Задача 4.61.

Ведущий диск фрикционного сцепления вращается с угловой скоростью ω и прижимается к ведомому диску с силой F. Какую максимальную мощность $N_{\max}$ можно передать с помощью такого сцепления, если радиус дисков равен R, а коэффициент трения μ?

Решение.

$$P = \frac{F}{\pi R^2}.$$



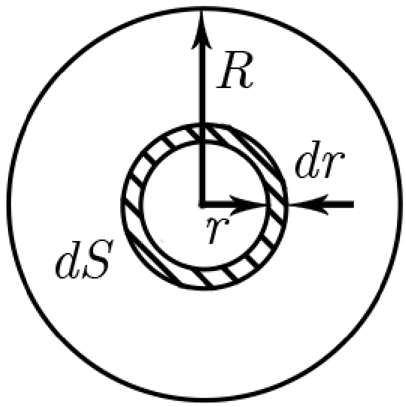


Рис. 4.9

$$dF_{\text{тр}} = kPd\rho = 2\frac{F}{\pi R^2}2\pi r dr.$$

Сила ведомого вала:

$$dF \leqslant dF_{\text{тр}}.$$

Мощность ($v = \omega r$):

$$dN = vdF \leqslant \omega r k\frac{F}{\pi R^2}dr = \frac{2kF\omega}{R^2}r^2 dr,$$

$$N \leqslant N_{\max} = \frac{2kF\omega}{R^2}\int\limits_0^R r^2\,dr = \frac{2}{3}kF\omega R.$$