ЛЕКЦИЯ 7

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим теорему Гаусса для нахождения гравитационных полей на примере шара с постоянной плотностью ρ и радиусом R (см. рис. 7.1).

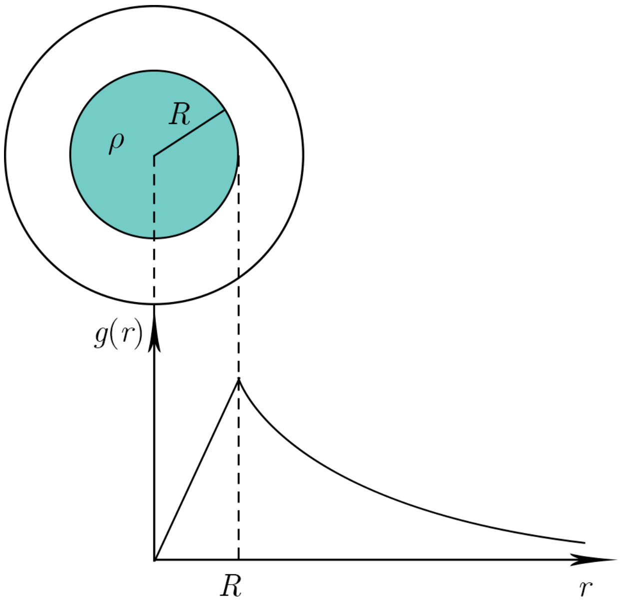

Рис. 7.1

Покажем напряженность этого поля вне этого шара. При $r > R$:

$$\Phi = g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho \frac{R^3}{r^2} = \frac{\gamma M}{r^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2}.$$

1. Движение тел в центрально-симметричном поле. Задача двух тел

Центрально-симметричное поле — это такое поле, в котором силы направлены по радиусам взаимодействия. У сил в подобных полях отсутствует момент силы, т. к. их «плечо» равно нулю. Примерами таких полей являются гравитационное поле, кулоновское поле.

Задача двух тел рассматривается, потому что природа устроена так, что тела взаимодействуют попарно (см. рис. 7.2), а третьи тела включаются по принципу суперпозиции, но вступают во взаимодействие также попарно. Поэтому неестественно рассматривать задачу трех тел, поэтому они и не имеет решения. Для ее решения не хватает условий.

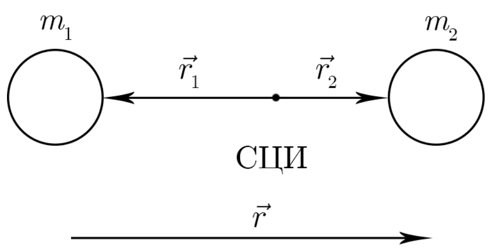

Рис. 7.2

$$\vec{r}_{\text{ци}} = 0, \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}.$$

Рассмотрим гравитационное взаимодействие этих тел:

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r},$$

где γ — гравитационная постоянная.

$$\gamma = 6,674\cdot 10^{-11}\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Запишем полную энергию этого взаимодействия:

$$E = K_1 + K_2 + \Pi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = \frac{m_1\dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{r}_2^2}{2} + \Pi(r).$$

Подставим в эту формулу найденные значения для r_1 и r_2 и продифференцируем:

$$E = \frac{m_1}{2}\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2 + \frac{m_2}{2}\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2 + \Pi(r),$$

$$E = \frac{m_1 m_2\dot{r}^2}{2(m_1+m_2)}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) + \Pi(r),$$

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}=1,$$

$$E=\frac{\mu\dot{r}^2}{2}+\Pi(r).$$

Найдем потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух тел

$$\Pi(r)=-\int F(r)dr=-\gamma m_1 m_2\int\frac{dr}{r^2}.$$

В данной задаче работают силы притяжения

$$\Pi(r)=-\gamma m_1 m_2\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2}=\gamma m_1 m_2\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right),$$

$$\Pi(r)=-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=-\frac{\alpha}{r}.$$

На бесконечности потенциальная энергия взаимодействия равна нулю, т. к. тела перестают взаимодействовать, а дальше эта энергия меньше нуля, потому что мы «растаскиваем» тела, уводя их на бесконечность, совершая работу. Работа против сил притяжения отрицательна.

Далее рассмотрим взаимодействие тела с очень большой массой M (например, звезды) и тела с массой m (например, планеты). При этом $M >> m$. В этом случае $\mu \approx m$.

Это означает, что центр масс системы лежит в центре звезды, а сама звезда практически неподвижна.

$$E=\frac{mV^2}{2}+\Pi(r)=\text{const}.$$

Т. е. диссипации энергии в этой задаче нет.

Но в рассмотренной задаче существует еще одна константа. Моменты сил взаимодействия в центрально-симметричном поле равны нулю:

$$M=0,\quad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0\rightarrow\vec{L}=\text{const}.$$

Момент импульса планеты относительно звезды постоянен. Отсюда следует, что траектория движения меньше массы m становится плоской, т. е. лежит в одной плоскости.

2. Момент импульса

Центр инерции расположен в преобладающей массе M (в центре звезды). Обозначим за r радиус-вектор до массы m (см. рис. 7.3). Тело массой m движется со скоростью V.

$$\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_\varphi\quad(\vec{V}_r=\dot{\vec{r}},\ V_\varphi=r\dot{\varphi}),$$

$$\vec{L}=\left[\vec{r}\cdot m\vec{V}\right]=\left[\vec{r}\cdot\vec{V}_\varphi\right],\quad L=mrV_\varphi=mrr\dot{\varphi}=mr^2\dot{\varphi},$$

$$I=mr^2\quad\Rightarrow\quad L=I\dot{\varphi}=I\omega.$$

I — момент инерции точки относительно центра масс этой системы.

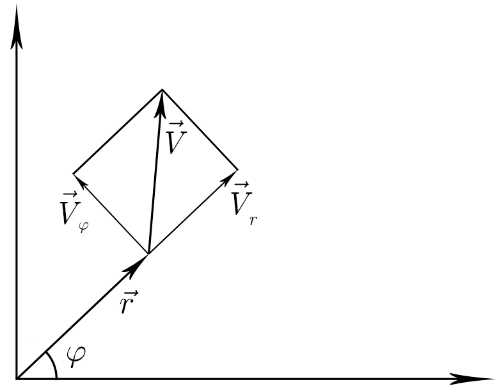

Рис. 7.3

Т. к. $L = \text{const}$:

$$V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2,$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \Pi(r). \end{cases}$$

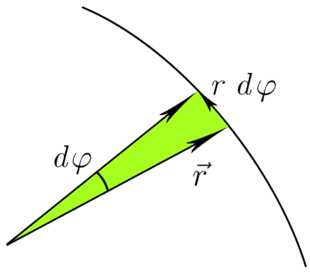

Рис. 7.4

Посчитаем площадь «заметаемую» вектором r (см. рис. 7.4)

$$dS = \frac{1}{2} r r d\varphi, \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}.$$

Последнее соотношение представляет из себя формулу для нахождения секториальной скорости

$$\frac{r^2}{2}\dot{\varphi} = \frac{L}{m} = \text{const}, \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}.$$

Последнее уравнение представляет из себя запись **второго закона Кеплера** согласно которому, площадь траектории, заметаемая радиус-вектором, есть величина постоянная.

Первый закон Кеплера говорит о том, что тело движется вокруг притягивающего центра по эллиптической траектории.

Вернемся к полученной системе уравнений и получим решение задачи двух тех:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{L^2}{m^2r^4}\right) + (r). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{L^2}{m^2r^4}\right)\Pi(r). \end{cases}$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \Pi(r)\right) - \left(\frac{L}{mr^4}\right)^2} = A(r), \quad \frac{dr}{A(r)} = dt,$$

$$d\varphi = \frac{L}{mr^4}dt = \frac{L}{mr^4}\frac{dr}{A(r)}, \quad \varphi = \int \frac{L}{mr^4 A(r)}dr + \text{const},$$

$$t = \int \frac{dr}{A(r)} + \text{const}.$$

Полученные интегралы представляют собой решение задачи в параметрической форме:

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{L^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E}} + \text{const},$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + \Pi(r)\right) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r),$$

где $V(r)$ — приведенный потенциал. Его график изображен на рис. 7.5.

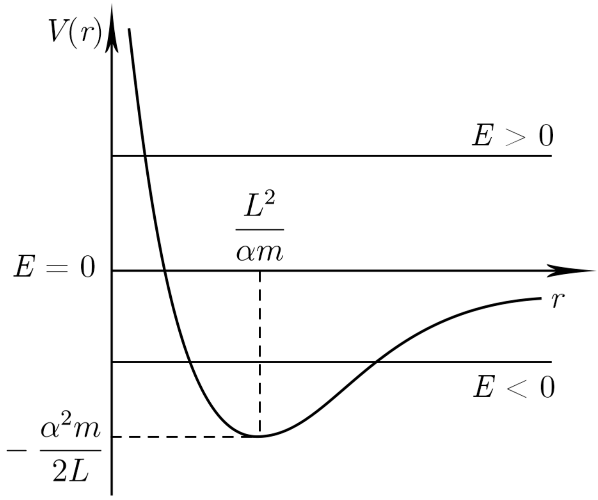

Рис. 7.5

Исследуем полученную функцию:

$$\left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right)' = 0, \qquad r_{\text{экстр}} = \frac{L^2}{m\alpha}, \qquad V_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2L}$$

Проведя анализ полученной формулы и ее графика, получим:

1. $E > 0$ — траектория движения представляет собой гиперболу. Движение инфинитное. Имеется всего 1 точка поворота.

2. $E = 0$ — траектория движения представляет собой параболу. Имеется 1 точка поворота. Движение инфинитное.

3. $E < 0$ — траектория движения представляет собой эллипс. Имеются 2 точки поворота. Движение финитное.

Таким образом, анализ полной энергии дает возможность убедиться, что движение является:

1. Финитным, если имеется 2 точки поворота

2. Инфинитным, если имеется 1 точка поворота.

Введем обозначения: P — параметр, e — эксцентриситет.

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L^2}{m\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E}} + \text{const}$$

$$\frac{L^2}{m\alpha} = P, \qquad \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E} = e,$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{P}{r} - 1}{e}, \qquad r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}.$$

Последняя формула является параметрической формой кривых второго порядка.

Это траектории движения в полярных координатах тела массой m вокруг тяжелого тела массой M.

1. Если $e < 1$ $(E < 0)$, то траекторией является эллипс (см. рис. 7.6).

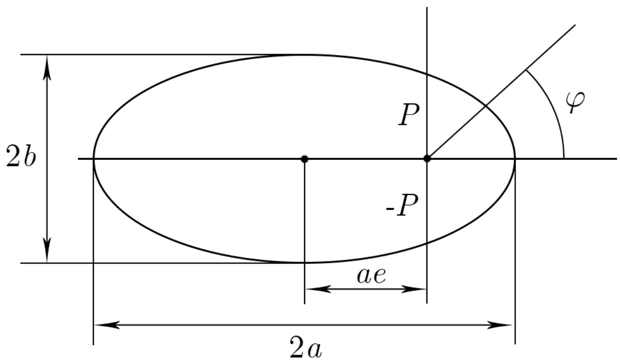

Рис. 7.6

Здесь a — большая полуось эллипса, b — малая полуось эллипса, ae — расстояние от центра эллипса до фокуса эллипса.

2. Если $e > 1$ $(E > 0)$, то траекторией является гипербола(см. рис. 7.7).

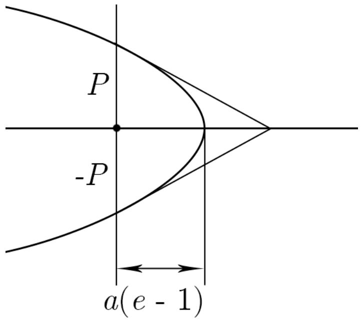

Рис. 7.7

$$a(e-1) = \frac{P}{e+1} = r_{\min}$$

3. Если $e = 1$ $(E = 0)$, то траекторией является парабола (см. рис. 7.8).

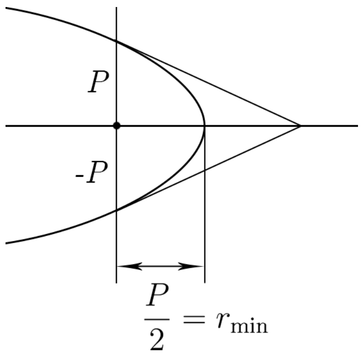

Рис. 7.8

3. Эллипс

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \left(\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right).$$

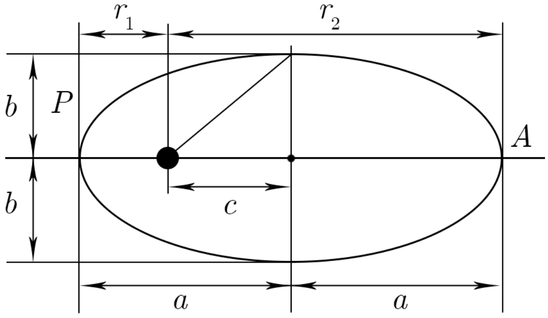

Рис. 7.9

A — апогелий, P — перигелий (см. рис. 7.9).

В точках A и P

$$\dot{r} = 0, \qquad mr^2E = L^2 - \alpha 2mr, \qquad r^2 + \frac{\alpha}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

Найдем корни, используя теорему Виета:

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\alpha}{E},$$

$$\alpha = \gamma Mm, \quad 2a = -\frac{\gamma Mm}{E}, \quad a = -\frac{\gamma Mm}{2E}.$$

Найдем малую полуось эллипса:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad c = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_1 r_2} = -\sqrt{\frac{-L^2}{2mE}}.$$

Для определения периода вращения воспользуемся вторым законом Кеплера:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \to 2m\int\limits_0^{S_{\text{элл}}} dS = L\int\limits_0^T dt,$$

$$2mS_{\text{элл}} = LT, \qquad 2m\pi ab = LT, \qquad T = \frac{2m\pi ab}{L} > 0,$$

$$ab = \frac{\gamma mM}{2E} \cdot \frac{L}{\sqrt{2mE}}, \qquad T = \pi\gamma mM\sqrt{\frac{m}{2E^3}},$$

Из полученных соотношений следует **третий закон Кеплера**:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

Для рассмотренного случая $m << M$

$$\frac{T^2}{a^3} = \pi^2\gamma^2M^2m^2\frac{m}{2E^3} \cdot \frac{8E^3}{\gamma^3M^3m^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}.$$

Для соизмеримых масс

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\sum M_i}.$$

4. Круговая орбита

$$a = b = R = -\frac{\gamma Mm}{2E}, \qquad \Pi = -\frac{\gamma Mm}{R} = 2E,$$

$$E = K + \Pi = \frac{\Pi}{2} \to K = -\frac{\Pi}{2} = -E.$$

Запишем выражение для первой космической скорости:

$$\frac{mV_{кр}^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2} \to V_{кр} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_З^2}{R}},$$

$$V_I = \sqrt{g_0 R_З} = 7,91 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Первая космическая скорость — это скорость спутника, летающего на орбите, высота которой $H << R_З$

Вторая космическая скорость — это скорость, которую нужно придать спутнику, чтобы он вышел из поля притяжения Земли, т. е такая, чтобы энергия стала равной нулю:

$$E = 0 = \frac{mV_{\text{пар}}^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r^2} \to V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{g_0 R_З^2}{R}},$$

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{2 g_0 R_З} = \sqrt{2} V_I = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

5. Момент инерции тела. Вращение тел вокруг оси

Пусть имеется система точек массами m_i, которые вращаются относительно некоторой оси (см. рис. 7.10).

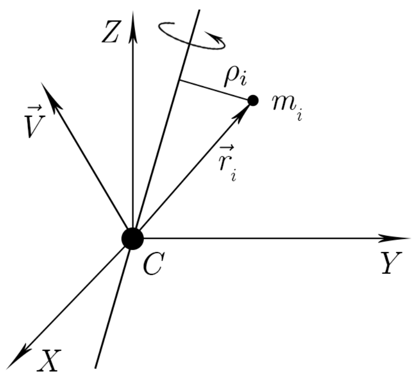

Рис. 7.10

По **теореме Кёнига**:

$$K = \frac{MV_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i V_{\text{i отн}}^2}{2},$$

$$\vec{V}_{\text{i отн}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i] V_{\text{i отн}} = \omega \rho_i,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i V_{\text{i отн}}^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2,$$

$$I_\omega = \sum m_i \rho_i^2.$$

I_ω называется **моментом инерции** тела относительно оси, проходящей в рассматриваемом примере через центр масс.