ЛЕКЦИЯ 10

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Продолжаем рассматривать движение в гравитационных полях: движение спутников, планет и т. д.

1. Движение в гравитационных полях

Задача 7.72

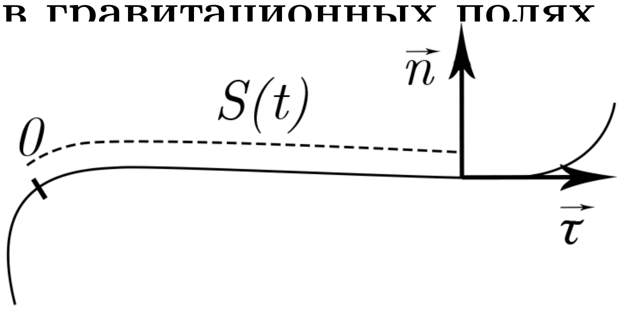


Рис. 10.1

Определить, какую дополнительную скорость необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, вращающемуся на очень высокой орбите, чтобы он смог достичь орбиты Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми. Диаметр орбиты Земли $D_з = 3 * 10^8$ *км* ($R_з = 1$*а. е.* $= 1,5 * 10^8$ *км*), орбита Марса в полтора раза больше: $R_м = 1,52$ *а. е.*

Решение:

1. Т. к. сказано, что спутник летает на очень высокой круговой орбите, можно пренебречь потенциальной энергией взаимодействия с Землей, и у него остается только взаимодействие с Солнцем, т. е. спутник можно рассматривать как самостоятельное тело, находящееся на орбите Земли, летающее со скоростью Земли. Получаем, что в условиях данной задачи рассматривается спутник Солнца, находящийся на орбите, равной орбите Земли.

2. Понятно, что спутник совершает перелет по элиптической орбите с $R_з + R_м = 2a$ (см. рис. 10.2)

3. Энергия спутника на орбите Земли, до того как сообщили скорость (запишем как $E_з$):
$$E_з = -\frac{\gamma\, m\, M_с}{2R_з}$$

4. Когда спутник перейдет на элиптическую орбиту:
$$E_{элл} = -\frac{\gamma\, m\, M_с}{2\, a}$$
Найдем разницу этих энергий:
$$E_{элл} - E_з = \frac{\gamma\, m\, M_с}{2\, R_з}\left(1 - \frac{R_з}{a}\right)$$
Подставив $a = R_з + R_м$, получим:
$$E_{элл} - E_з = \frac{\gamma\, m\, M_с\,(R_м - R_з)}{2\, R_з\,(R_з + R_м)} \quad (1)$$

5. Заметим, что при переходе на другую орбиту изменяется только кинетическая энергия спутника, т. е :
$$E_{элл} - E_з = \frac{m}{a}\left({V_х}^2 - {V_з}^2\right) \qquad (2)$$
Приравняем (1) к (2) и найдем $V_х$:
$${V_х}^2 = {V_з}^2 + \frac{\gamma\, M_с\,(R_м - R_з)}{R_з\,(R_з + R_м)},$$
где $\sqrt{\frac{\gamma\, M_с}{R_з}}$ это скорость на Земной орбите или скорость Земли (30 м/с), получается:
$$V_х = V_з\sqrt{\frac{2\frac{R_м}{R_з}}{\frac{R_м}{R_з} + 1}},$$
тогда искомая скорость:
$$\Delta\, V = V_х - V_з \approx 3 \text{ км/с}.$$

Задача 7.5

Два тела с одинаковыми массами M движутся из бесконечности параллельными курсами, расстояние между которыми (прицельное расстояние) равно l. Начальные скорости одинаковы и равны v_0. Каково будет минимальное расстояние $r_{\min}$ между телами с учетом их гравитационного притяжения?

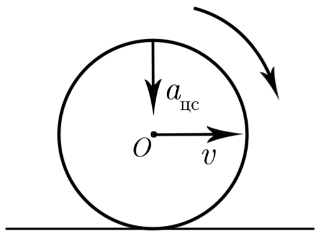


Рис. 10.2

Решение:

1. Т. к они движутся из бесконечности, т. е у них нет потецниальной энергии взаимодействия, следовательно полная энергия каждого из этих тел больше нуля, она же и есть кинетическая; раз полная энергия больше нуля, следовательно их траектория — гипербола.
2. У этой системы двух тел есть неподвижный центр масс, относительно которого и будем находить $r_{\min}$
3. При максимальном сближении вектор скорости тела перпендикулярен $r_{\min}$. Обозначим эту скорость v_1
4. Остается записать законы сохранения энергии и момента импульса:

Закон сохранения момента импульса относительно центра масс (точки C):

$$2M\,v_0\frac{l}{2} = 2M\,v_1\frac{r_{\min}}{2} \qquad (1)$$

Закон сохранения энергии:

$$2M\frac{{v_0}^2}{2} = 2M\frac{{v_1}^2}{2} - \frac{\gamma\,M^2}{r_{\min}} \qquad (2)$$

Решив систему из уравнений (1) и (2), получаем:

$$r_{\min} = -\frac{\gamma\,M}{2\,{v_0}^2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma\,M}{2\,{v_0}^2}\right)^2 + l^2}$$

2. Теорема Гаусса. Ввод понятия потока вектора

Утверждение 1 Введем понятие потока вектора на примере воды, текущей по трубе с площадью сечения S, с скоростью $\vec{v}$.

Поток вектора скорости — расход воды через эту площадку площадью S:

$$\Phi = v\,S.$$

Если площадку ориентировать иначе ($\vec{n} \perp v$):

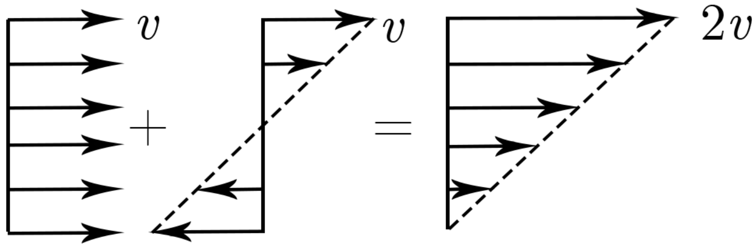


Рис. 10.3

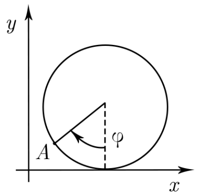


Рис. 10.4

$$\Phi = (\vec{v}\,\vec{S}) = v\,S\cos\alpha.$$

В электростатике, например, это поток вектора напряженности поля через какую-нибудь поверхность. В теории гравитации таковым потоком является $\vec{g}$. Возьмем точечную массу M, окруженную любой **замкнутой** поверхностью. Накинем на поверхность сетку (см. рис. 10.5).

Берем любую клеточку dS, которую пронизывает $\vec{g}$. У площадки есть нормаль $\vec{n}$, т. е. S является вектором. Следовательно:

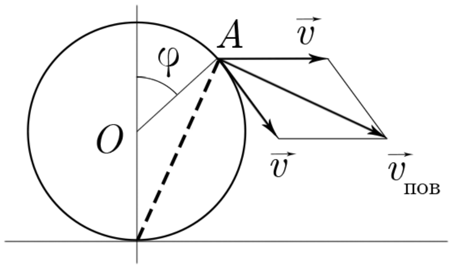


Рис. 10.5

$$\int d\Phi = \int (\vec{g}\,d\vec{S}) = 4\pi\,\gamma\,M,$$

где 4π — полный телесный угол, под которым видна вся внутренняя поверхность S.

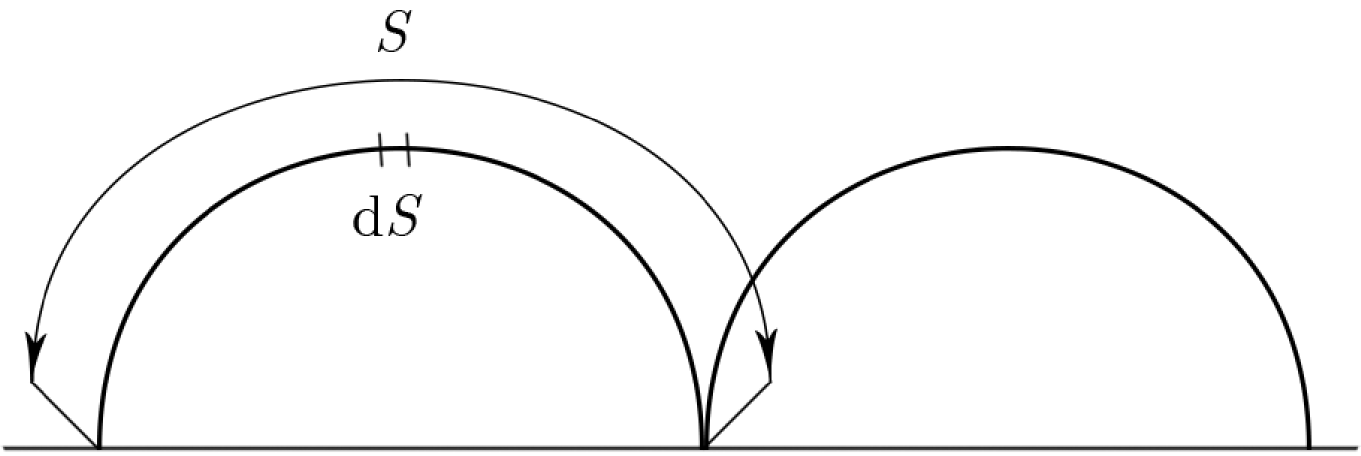
Пусть в пространстве есть толстый слой космической пыли толщиной H. Спрашивается, как распределено гравитационное поле в этом бесконечно толстом слое пыли (см. рис. 10.10).

Очевидно, что в центре $\vec{g} = 0$.

Рассмотрим площадь цилиндра:

$$\Phi_y = g(x)S = 4\pi\,\gamma\,\rho\,Sx.$$

Найдем значение $g(x) = 4\pi\,\gamma\,\rho\,x$.
Тогда на концах и за пределами пыли $g\left(\frac{H}{2}\right) = 2\pi\,\gamma\,\rho\,x$,



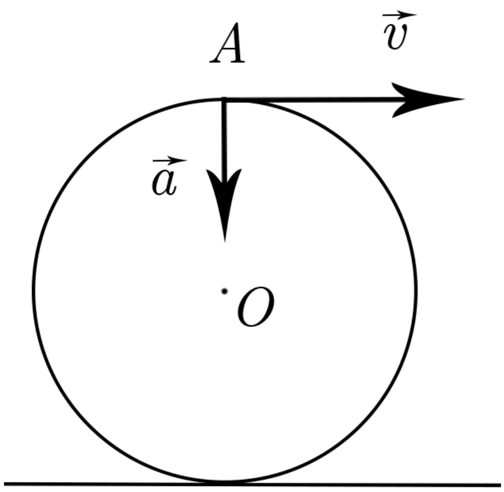


Рис. 10.6

Задача 7.86

Космическое тело массой M и радиусом r, как и у Земли, летит со скоростью $v_0 = 11,2$ км/с. Это тело проходит через облако пыли с плотностью $\rho = 10^{-4}\ \frac{кг}{м^3}$. Толщина облака пыли $h = 10^9$ м. Найти увеличение массы тела $\delta\,M$ после выхода из облака.

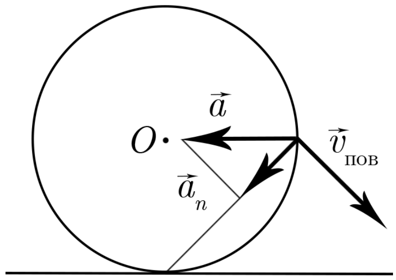


Рис. 10.7

Решение:

1. Подсчитаем собственное гравитационное поле этого облака и выясним, велико оно или мало по сравнению с гравитационным полем Земли:

$$g_{\text{обл}} = 2\pi\gamma\rho h = 10^{-5}\frac{м}{с^2},$$

что, конечно же, много меньше $g_{\text{Земли}}$. Т. е. далее будем считать, что облако состоит из множества отдельных пылинок, не взаимодействующих друг с другом.

Теперь можно перейти в СО Земли, и тогда можно будет сказать, что отдельные пылинки полетят из бесконечности на тело со скоростью v_0. И тогда их траекторией будет являться гипербола (т. к. $E_{\text{полн}} > 0$).

2. Будем рассматривать предельное тело, т. е. находящееся на предельном расстоянии R: если пылинка находится на расстоянии $> R$, то данное тело не приобретет эту пылинку; если $\leqslant R$, то пылинка упадет на данное тело.

3. Запишем ЗСМИ:

$$m v_0 R = m v r$$

4. Запишем ЗСЭ:

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r}.$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$R^2 = r^2\left(1 + \frac{2\gamma M}{r{v_0}^2}\right),$$

где $2\gamma M$ есть вторая космическая скорость ${v_0}^2$, тогда:

$$R = r\sqrt{2}.$$

Найдем ΔM:

$$\Delta M = \rho\pi R^2 h = 2,6 * 10^{19}\ кг.$$

Задача 7.109

Определить усилие, действующее на трос длиной $l = 100$ м, на котором находится космонавт при максимальном удалении от Земли. Спутник движется по круговой орбите на расстоянии $2R_з$ от центра Земли. Масса космонавта $m = 100$ кг много меньше массы спутника. Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

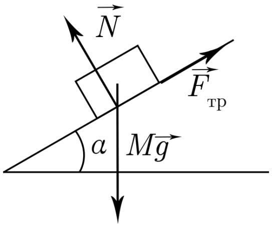


Рис. 10.8

Решение:

1. Найдем угловую скорость, с которой вращается станция вокруг Земли:

$$M\omega^2 = \frac{\gamma M M_з}{R^2}$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_з}{R^3} = \frac{g_0 {R_з}^2}{R^3} = \frac{g_0}{8R_з}.$$

2. Запишем, чему будет равна центростремительная сила для космонавта:

$$m\omega^2 (R + l) = \frac{\gamma m M_з}{R + l^2} + T,$$

отсюда находим T

$$T = m\omega^2 (R + l) - \frac{\gamma m M_з}{R + l^2} = m\omega^2 R + m\omega^2 l - \frac{\gamma M_з}{R^2 \left(1 + \frac{l}{R}\right)^2},$$

т. к. $R >> l$:

$$T = \frac{3m g_0 l}{8R_з} \approx 6 * 10^{-3} \ H$$

Задача 7.132

Считая Землю однородным шаром радиусом R плотностью ρ, найти зависимость гравитационного давления от расстояния до центра Земли. Оценить давление в центре Земли, полагая $R = 6400$ км, $\rho = 5,5 \ \frac{г}{см^3}$.

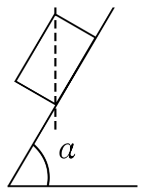


Рис. 10.9

Решение:

1. Будем использовать готовую формулу:

$$dP = -\rho\, g dr.$$

2. Из теоремы Гаусса:

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R}$$

Таким образом можем записать:

$$\int\limits_R^r dP = -\frac{\rho\, g}{R} \int\limits_R^r r dr,$$

$$P(r) = -\frac{\rho\, g_0}{2R} \left(r^2 - R^2\right) = \frac{\rho\, g_0\, R}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

вспомнив, что $g(r) = \frac{4}{3}\pi\,\gamma\,\rho\, r$:

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi\,\gamma\,\rho^2\left(R^2 - r^2\right).$$

Тогда давление в центре Земли $P(0) = 2 * 10^4$ Па.

Задача 7.136

Математический маятник расположен на поверхности Земли над тоннелем метро. Тоннель находится на глубине $H = 15$ м, а его диаметр $2R = 10$ м. Принимая среднюю плотность грунта равной $\rho = 2\ \frac{г}{см^3}$, оценить относительное изменение периодов колебаний $\frac{\Delta T}{T}$ маятника, вызванное наличием тоннеля.

Решение:

1. Зная формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, запишем:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2g}.$$

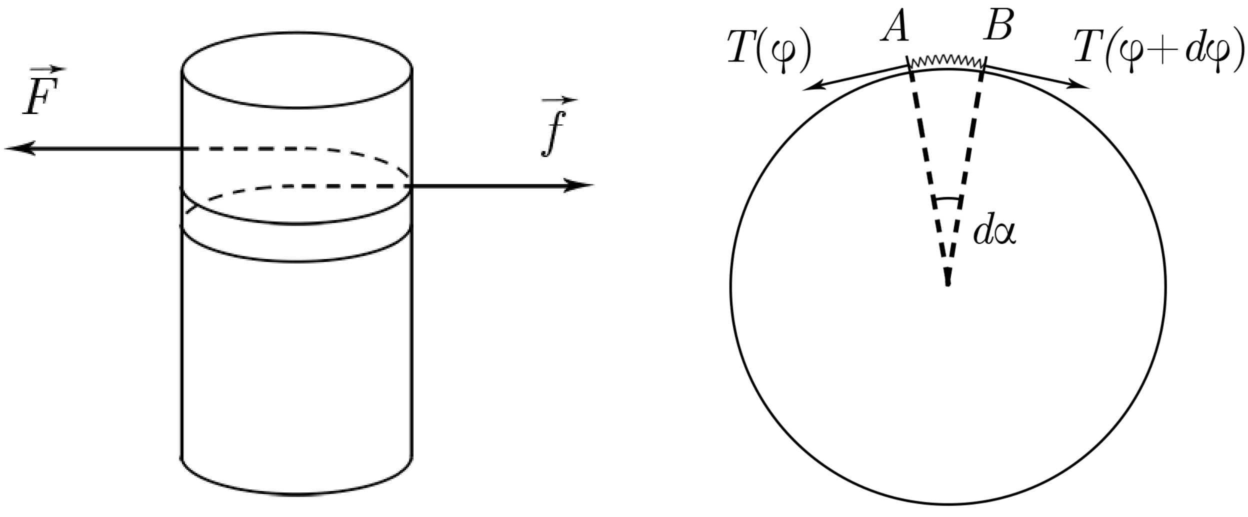


Рис. 10.10

2. Возьмем цилиндр с радиусом H и длиной l. Удалим эту часть (см. рис. **??**). Теперь, по теореме Гаусса:

$$\Delta g * 2\pi\, Hl = 4\pi\,\gamma * \pi\,\rho\, R^2\, l,$$

где $\pi\,\rho\, R^2\, l$ — масса, которая была удалена. Найдем Δg и, подставив в $\frac{\Delta T}{T}$, запишем ответ: 10^{-7}.