ЛЕКЦИЯ 12

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Преобразование времени и координат

1.1. Классический случай

Рассмотрим, как преобразуются координаты и время при переходе от одной системы к другой, движущейся со скоростью V относительно первой (предполагается, что все рассматриваемые скорости по модулю много меньше скорости света).

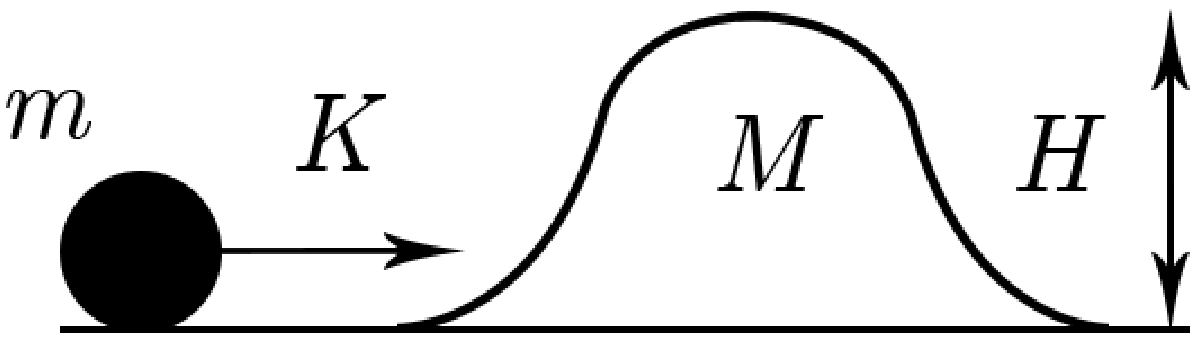

Рис. 12.1

В классическом рассмотрении этой задачи принимается одинаковое течение времени в обеих системах:

$$t = t'.$$

Преобразование координат:

$$x = x' + Vt.$$

Совокупность указанных выше правил, согласно которым осуществляется переход в лабораторную систему отсчета из движущейся относительно неё системы отсчета, называется **преобразованием координат и времени Галлилея.**

Продифференируем по времени преобразование координат:

$$\dot{x} = \dot{x}' + V,$$

$$v = v' + V.$$

Скорость объекта в движущейся системе отсчета относительно лабораторной системы отсчета есть сумма двух скоростей.

Продифференцируем это соотношение ещё раз:

$$\ddot{x} = \ddot{x},$$

$$a = a'.$$

Ускорение одинаково во всех инерциальных системах отсчета, то есть оно **инвариантно**.

Было сформулировано следующее утверждение: все законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея.

1.2. Релятивистский случай

В теории относительности скорость света является инвариантом. Это было установлено опытным путём.

$$c = c'.$$

Если расмотреть случай фотонов, движущихся параллельно друг другу, то выяснится, что скорость одного фотона относительно другого будет равна скорости света c.

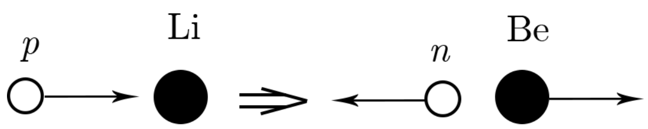

Рис. 12.2

Позже увидим, что ни один материальный объект не может двигаться со скоростью света. Такой тип движения могут осуществлять лишь безмассовые объекты.

Лоренцом были получены **преобразования Лоренца** координат и времени:

$$x = x' + \frac{Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Отношение $\dfrac{V}{c}$ будем обозначать как β, а $\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ — как γ (фактор Лоренца, гамма-фактор или релятивистский фактор).

При скоростях, равных нулю, γ равен единице. При скоростях, близких к скорости света, он стремится к бесконечности.

Найдём, как преобразуются скорости.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + V/c^2 dx'} = \frac{dx'/dt' + V}{1 + V/c^2 dx'/dt'} = \frac{v' + V}{1 + V/c^2 v'}.$$

2. Динамика

Энштейном было выведено выражение для импульса частицы:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma m\vec{v}.$$

Также он ввёл понятие полной энергии частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma mc^2.$$

Кинетическая энергия:

$$K = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1).$$

При малых скоростях получается следующее выражение для кинетической энергии:

$$K \approx \frac{mv^2}{2}.$$

Энштейн вывел эти соотношения из соображений закона сохранения импульса и в релятивистском случае.

Из выражений для импульса и энергии следует:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

Для фотона (безмассовой частицы) $m = 0$, и

$$E = pc.$$

Если скорость материальной частицы будет стремиться к скорости света, её импульс будет стремиться к бесконечности, причем очень быстро. То же самое можно сказать про полную энергию. Таким образом, можно сказать, что реальная частица, обладающая массой, не может двигаться со скоростью света, т. е. это предельная скорость.

Скорость частицы:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}.$$

Скорость центра масс системы частиц:

$$\vec{v}_{\text{C}} = \frac{\sum \vec{p}_i c^2}{\sum E_i}.$$

Второй закон Ньютона:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \vec{F}.$$

При дифференцировании этого соотношения меняется скорость, и получается, что левая часть этого уравнения состоит из двух членов: один коллинеарен ускорению, а второй коллинеарен скорости. Получается, что сила F не коллинеарна ускорению.

Задача 8.75.

Частица массой m начинает двигаться под воздействием постоянной по величине и направлению силы F. При $t = 0$ скорость частицы V_0 равна нулю. Через некоторое время на расстоянии x и некоторого отсчета времени t эта частица все еще продолжает двигаться под воздействием силы F, но её скорость равна $0,8\,c$. На каком расстоянии от

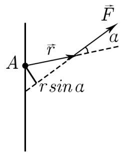

Рис. 12.3

начальной точки частица достигла этой скорости?

Решение.

Под воздействием силы работа этой силы уходит на прирост кинетической энергии. Поскольку сила действует постоянно, полная работа есть Fx.

$$Fx = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - mc^2 \quad \Rightarrow \quad x = mc^2\frac{\gamma - 1}{F}.$$

Скорость в конечный момент времени: $0,8\,c$.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = \frac{5}{3}.$$

$$x = \frac{2mc^2}{3F}.$$

В задаче 8.25 рассматривалось движение электрона по трехкилометровой трубе ускорителя со скоростью, близкой к скорости света. Нужно было выяснить, какой «покажется» электрону длина трубы. Оказалось, что ответом будет величина около 40 см.

Решим задачу, подобную этой.

Задача 8.24.

В 1963 году в космических лучах был обнаружен протон с колоссальной энергией: $E = 10^{20}$ эВ. Полагаем, что он родился на границе галактики на расстоянии $T = 10^5$ световых лет от Земли. Его полная энергия росла линейно со временем, начиная от энергии покоя $E_0 = 1$ ГэВ. Сколько времени он затратил на этот путь по «собственным часам»?

Решение.

$$E(t) = \gamma(t) mc^2.$$

Гамма-фактор менялся линейно по времени:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \frac{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0}{T} t.$$

Поскольку $\gamma_0 = 1$, а

$$\gamma_{\text{кон}} = \frac{E}{mc^2} = 10^{11},$$

то

$$dt_{\text{соб}} = \frac{dt}{\gamma(t)},$$

$$T_{\text{соб}} = \int\limits_0^T T \frac{dt}{\gamma_0 + \frac{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0}{T} t} = \frac{T}{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0} \int\limits_0^T \frac{d(\gamma_0 + \frac{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0}{T} t)}{\gamma_0 + \frac{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0}{T} t} = \frac{T}{\gamma_{\text{кон}} - \gamma_0} \ln \frac{\gamma_{\text{кон}}}{\gamma_0} =$$
$$= 10^{-6} \cdot 3{,}16 \cdot 10^7 \cdot 11 \ln 10 \approx 800 \text{ с}.$$

Задача 8.59.

Два протона, ускоренные до энергии 10 ГэВ, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой лоб в лоб. Определить энергию второй частицы в системе отсчета первой. Собственная энергия протона: $E_0 = 938{,}3$ МэВ.

Решение.

Найдём реальную скорость частицы:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

$$E' = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta_{\text{отн}}^2}}.$$

$$\beta_{\text{отн}} = \frac{2\beta}{1+\beta^2}.$$

$$1 - \beta_{\text{отн}}^2 = 1 - \frac{4\beta^2}{(1+\beta^2)^2},$$

$$\sqrt{1-\beta_{\text{отн}}^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{\frac{E_0^2}{E^2}}{2 - \frac{E_0^2}{E^2}} = \frac{E_0^2}{2E^2 - E_0^2}.$$

$$E' = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta_{\text{отн}}^2}} = \frac{2E^2 - E_0^2}{E} = \frac{2 \cdot 10^2 - 0{,}94^2}{10} = 213 \text{ ГэВ}.$$

3. Удары релятивистских частиц. Пороговая энергия

Частица (снаряд) A с энергией E_{min} (пороговая энергия) и импульсом p_{A} налетает на мишень — частицу B с импульсом $p_{\text{B}} = 0$ (мишень неподвижна).

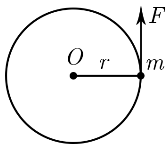

Рис. 12.4

При таких релятивистских ударах может наблюдаться рождение антипротона:

$$P + P \to P + P + (P + \tilde{P}).$$

В пороговом случае все четыре частицы будут двигаться как единое целое со скоростью центра масс этой системы. Конгломерат из четырех или более частиц назовем C с импульсом p_{C}, а полная энергия: E_{C}.

Закон сохранения энергии примет вид:

$$E_{\text{A}} + E_{\text{B}} = E_{\text{C}}.$$

Закон сохранения импульса:

$$p_{\text{C}} = p_{\text{A}}.$$

Возведем первое соотношение в квадрат (здесь индексом «0» обозначается энергия покоя частицы B):

$$E_{\text{A}}^2 + 2_{\text{A}} E_{\text{B 0}} + E_{\text{B 0}}^2 = E_{\text{C}}^2.$$

В соответствии с релятивистскими формулами квадрат полной энергии выражается следующим образом:

$$E_{\text{A}}^2 = p_{\text{A}}^2 c^2 + E_{\text{A 0}}^2.$$

Для конгломерата частиц:

$$E_{\text{C}}^2 = p_{\text{C}}^2 c^2 + E_{\text{C 0}}^2.$$

В этом уравнении импульсы сокращаются, поскольку они равны в левой и правой части.

Из полученных соотношений следует формула минимальной энергии:

$$E_{\text{A min}} = \frac{E_{\text{C 0}}^2 - E_{\text{A 0}}^2 - E_{\text{B 0}}^2}{2E_{\text{B 0}}}.$$

Пороговая энергия частицы — эта энергия, которой будет достаточно, чтобы произошло превращение (рождение конгломерата). Если энергия больше пороговой, то произойдет реакция, и возникнут относительные движения, в результате чего частицы смогут вылетать в различных направлениях.

Задача 8.49.

Энергия покоя анти-лямбда-с-гиперона $\tilde{\Lambda}_{\text{C}}$ равна 2,26 ГэВ. Найти минималью энергию протонов, влетающих на неподвижную мишень, когда возможно появление пары «гиперон-антигиперон»:

$$P + P \to P + P + \Lambda_{\text{C}} + \tilde{\Lambda}_{\text{C}}.$$

Решение.
Пороговая энергия:

$$E_{\min} = \frac{(2m_{\text{P}}c^2 + 2m_{\tilde{\Lambda}_{\text{C}}}c^2)^2 - 2m_{\text{P}}^2c^4}{2m_{\text{P}}c^2} = 20,8 \text{ ГэВ}.$$

Кинетическая пороговая энергия:

$$K_{\text{пор}} = E_{\min} - m_{\text{P}}c^2 = 19,9 \text{ ГэВ}.$$

Из формулы для пороговой энергии нетрудно получить следующее выражение для пороговой кинетической энергии:

$$K_{\text{пор}} = Q\left(1 + \frac{m_{\text{A}}}{m_{\text{B}}}\right),$$

где

$$Q = E_{\text{C}\,0} - E_{\text{A}\,0} - E_{\text{B}\,0}.$$

Задача 8.54.
D^0-мезон (электрически нейтральный) не оставляя следа в фотоэмульсии в точке распада распадается на лету на два мезона: K^- и π^+. Расстояние от точки его рождения до точки распада: $l = 350$ мкм. Энергия мезонов: $E_{\text{K}} = p_{\text{K}}c = 3,6$ ГэВ, $E_\pi = p_\pi c =$

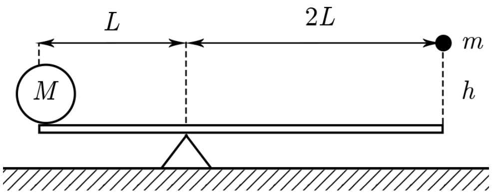

Рис. 12.5

1,9 ГэВ (считается, что частицы ультрарелятивистские, и можно пренебречь их энергией покоя). Частицы разлетелись под углами $\Theta_{\text{K}} = 13°30'$, $\Theta_\pi = 27°50'$. Определить энергию покоя D^0-мезона, его скорость, время жизни в его системе отсчёта.
Решение.
Запишем закон сохранения энергии:

$$E_{\text{D}} = E_\pi + E_{\text{K}},$$

$$E_{\text{D}}^2 = E_\pi^2 + 2E_\pi E_{\text{K}} + E_{\text{K}}^2.$$

Закон сохранения импульса:

$$p_{\text{C}}c = E_\pi \cos\Theta_\pi + E_{\text{K}} \cos\Theta_{\text{K}} = 1,9 \cdot 0,885 + 3,66 \cdot 0,972 = 5,18 \text{ ГэВ}.$$

Полная энергия:

$$E_{\text{D}} = 3,6 + 1,9 = 5,5 \text{ ГэВ}.$$

Найдём энергию покоя:

$$m_{\text{D}}c^2 = \sqrt{E_{\text{D}}^2 - p_{\text{D}}^2c^2} = 1,85 \text{ ГэВ}.$$

Релятивистский фактор:

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_{\text{D}}c^2}{E_{\text{D}}} = \frac{1,85}{5,5} = 0,336.$$

Найдём скорость D^0-мезона:

$$1-\beta^2 = 0,133, \qquad \beta = \frac{v}{c} = 0,94.$$

Найдём время в лабораторной системе отсчёта:

$$t_{\text{ЛСО}} = \frac{l}{\beta c} = \frac{350 \cdot 10^{-6}}{0,94 \cdot 3 \cdot 10^8} = 12,4 \cdot 10^{-13} \text{ с}.$$

Время жизни в системе D^0-мезона:

$$\tau_{\text{D}} = t_{\text{ЛСО}}\sqrt{1-\beta^2} = 4,2 \cdot 10^{-13}.$$

Задача 8.73.

Частица массой $m_1 = 8m_0$ движется по оси x, а частица с массой $m_2 = 0,6m_0$ движется по оси y. Известны полные энергии обеих частиц: $E_1 = E_2 = 10m_0c^2$. Определить скорость центра инерции системы по модулю и по направлению.

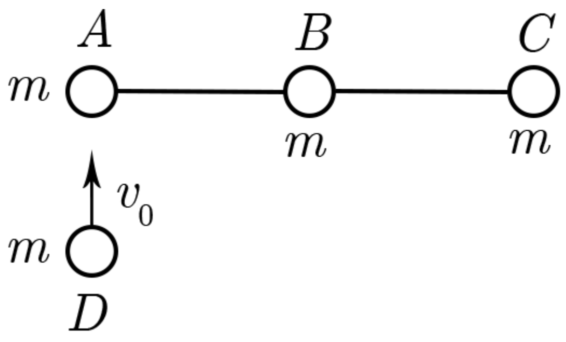

Рис. 12.6

Решение.

Скорость центра масс:

$$|V_\text{C}| = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}c^2}{E_1 + E_2}.$$

$$(p_1 c)^2 = E_1^2 - (m_1 c^2)^2.$$

$$p_1 = 6m_0 c, \qquad p_2 = 8m_0 c.$$

$$|V_\text{C}| = \frac{\sqrt{36 + 64}}{10 + 10} c = 0,5\, c.$$

Найдём угол α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p_2}{p_1} = \frac{4}{3}.$$

Задача 8.68.

Проводилась бомбардировка релятивистскими протонами неподвижных изотопов $^3_2$He с двумя протонами и одним нейтроном. Полная энергия обеих частиц в системе центра инерции составляет: $E = 2\sqrt{5} m_\text{p} c^2$. Определить скорость протона v_p в лабораторной системе отсчёта.

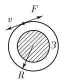

Рис. 12.7

Решение.

В системе центра инерции суммарный импульс равен нулю, а суммарная энергия равна энергии покоя (поскольку в системе центра инерции нет движения).

Обозначим

$$\beta = \frac{v_\text{p}}{c}.$$

Тогда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \text{ — инвариант в ЛСО.}$$

Также инвариантом в ЛСО будет суммарная энергия покоя всех частиц:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

Выражение для полной энергии:

$$E^2 = (\gamma m_\text{p} c^2 + 3m_\text{p} c^2)^2.$$

Импульс:

$$p = \gamma m v = \gamma m \beta c,$$

$$pc = \gamma m \beta c^2.$$

Теперь распишем выражение для инварианта:

$$(\gamma m_\text{p} c^2 + 3m_\text{p} c^2)^2 + (\gamma m_\text{p} \beta c^2)^2 = m^2c^4 = (2\sqrt{5}m_\text{p}c^2)^2 = 20m_\text{p}c^4.$$

Тогда

$$(\gamma+3)^2 + \gamma^2\beta^2 = 20.$$

$$\gamma^2 + 6\gamma - 9 - \gamma^2\beta^2 - 20 = 0.$$

$$\gamma^2(1-\beta^2) + 6\gamma = 11.$$

Так как $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, то

$$6\gamma = 10 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} = \frac{4}{5}.$$

Этот же результат можно получить без использования релятивистских инвариантов. Рассмотрим столкновение частиц в системе центра инерции:

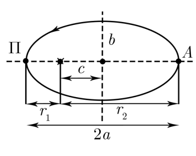

Рис. 12.8

Закон сохранения энергии:

$$\gamma_1 mc^2 + \gamma_2 3mc^2 = 2\sqrt{5}mc^2.$$

Закон сохранения импульса:

$$\gamma_1 mc\beta_1 - \gamma_2 3mc\beta_2 = 0.$$

Из полученной системы уравнений можно получить следующее:

$$\gamma_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \qquad \gamma_2 = \frac{7}{3\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{9}{5} - 1} = \frac{2}{3}, \qquad \beta_2 = \frac{2}{7}.$$

В лабораторной система отсчета:

$$\beta_{\text{Р}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{4}{5}.$$