ЛЕКЦИЯ 2

ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1. Корпускулярно-волновой дуализм

Электромагнитное излучение при некоторых условиях обладает **корпускулярными свойствами**, а в других проявляет себя как **волна**.

Принцип дополнительности гласит: в одном и том же явлении эти два свойства (свойства волн и свойства частиц) одновременно не проявляются.

При рассмотрении фотона как частицу электромагнитного излучения, полагают, что

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}.$$

Это равенство известно еще из специальной теории относительности. Фотон не обладает массой и, следовательно, не обладает энергией покоя.

Дальше будет установлено, что

$$\mathcal{E} = \hbar\omega.$$

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k = \frac{2\pi}{\lambda}\hbar = \frac{h}{\lambda},$$

где k — модуль волнового вектора, λ — длина волны фотона, $\lambda = \dfrac{h}{p}$. Это длина волны частицы с нулевой массой.

Интересен вопрос, обладают ли другие частицы (квантовые объекты) волновыми свойствами. В каких-то экспериментах частицы могут проявлять себя как волны, а в других — как частицы с энергией $\mathcal{E}$ и импульсом $\vec{p}$.

Связь между энергией и импульсом называется законом дисперсии:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

Волна характеризуется частотой и волновым вектором ω и $\vec{k}$. Связь между ними называется также закон дисперсии:

$$\omega = kc.$$

Запишем два симметричных выражения:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega,$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Свободно распространяющейся частице (например, если частица распространяется вдоль оси x) приписывают сопровождающую её волну:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t)}.$$

Поскольку временная часть не существенна, это можно записать и таким образом:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-\omega t)}.$$

В оптике аналогичное соотношение пишется в таком виде:

$$\psi = \psi_0 e^{i(\omega t-kx)}.$$

Однако в квантовой механике, в силу исторических причин, принято писать так:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t)}.$$

Также принимается, что квадрат модуля ψ будет $\psi^*\psi$.

Задача 2.5. Идея массы фотона

В опытах при измерении расстояния между Землей и Луной ($L = 3{,}8 \cdot 10^5$ км) локацией её поверхности оказалось, что результаты в оптическом и радиодиапазоне ($\lambda_1 = 20$ см) не совпадают. Отличие в результатах измерений объяснялось попаданием излучения в разные точки лунной поверхности, которые могли отличаться по высоте на $\Delta L = \pm\, 100$ м. С другой стороны, этот результат можно интерпретировать как результат отражения фотона с ненулевой массой от ровной поверхности. Принимая это, оценить возможную верхнюю границу массы фотона m_γ (в эВ).

Решение.

Установим, есть ли дисперсия (зависимость скорости от длины волны), если $m_\gamma \neq 0$.

$$E_\gamma = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2},$$

$$v = \frac{dE_\gamma}{dp} = \frac{2pc}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2c^4}{p^2c^2}}}.$$

С хорошей точностью можно записать:

$$E_\gamma \approx c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\right) = c\left(1 - \frac{1}{2}\left[\frac{mc\lambda}{h}\right]\right),$$

где использовалось выражение $p = \frac{h}{\lambda}$.

Далее следует, что

$$c - v = \frac{c}{2}\left(\frac{mc\lambda}{h}\right).$$

Это означает, что есть дисперсия. То есть, если учитывать, что протон имеет массу, появляется дисперсия.

Время, за которое проходят эти сигналы:

$$\frac{2L}{v_1} - \frac{2L}{v_2} = 2L\ \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2},$$

$$(c - v_1) - (c - v_2) = v_2 - v_1 = \frac{c^2m^2}{2h^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2),$$

Следовательно,

$$\Delta t = 2L\frac{c^3m^2}{2h^2c^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = \frac{Lcm^2}{h^2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2).$$

Длина волны света $\sim 10^{-5}$см, а λ_1=20 см, поэтому $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \approx \lambda_1^2 \quad \Rightarrow \ \Delta t = \frac{Lcm^2\lambda_1^2}{h^2}$. Из ΔL можно получить условие на Δt.

$$\Delta t \lesssim \frac{4\Delta L}{c}.$$

$$m^2 \lesssim \frac{4\Delta L h^2}{Lc^2\lambda_1^2} \quad \Rightarrow \quad m \lesssim \frac{2h}{\lambda_1 c}\sqrt{\frac{\Delta L}{L}} \approx 10^{-41}\ г.$$

2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

На самом деле, фотон не обладает массой и дисперсией. Но все реальные частицы обладают массой и дисперсией в вакууме.

Волна, сопровождающая свободно распространяющуюся частицу — это плоская волна, записываемая так:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - \varepsilon t)}.$$

Функция $\psi(x)$ называется **волновой функцией**. Величины p и ϵ считаются заданными точно, а величины x и t — меняются. Волна определена для любых x и t.

Будем рассматривать, что произойдет, если волну ограничить. Поставим щель на пути частицы, тогда произойдет дифракция Фраунгофера. Если бы эти частицы не считались обычными частицами, то на экране получилась бы яркая, четкая полоса. Однако опыт показывает, что появляется дифракция Фраунгофера, то есть частица попадает на любую часть экрана. Следовательно, можно говорить о вероятности попадания в некоторую точку экрана для частицы. Волновая функция несет в себе информацию о вероятности обнаружить частицу в какой-то точке пространства. Проверка возможна с помощью опыта.

Это показано на рисунках (**??**) и (2.1).

Пусть θ — положение дифракционного минимума. Попытаемся описать первый ди-

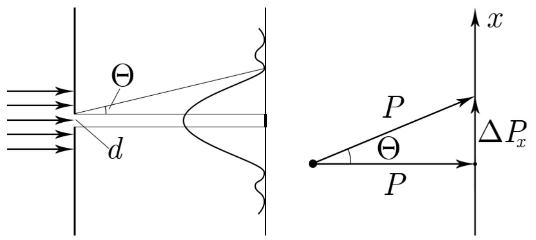

Рис. 2.1

фракционный минимум с двух позиций:

1) Волновое описание:

$$d\sin\theta = \lambda.$$

2) Корпускулярное описание.
Возникает p_x, и так как вектор $\vec{p}$ поворачивается, то $\Delta p_x = p\sin\theta$.

Если объединить эти два описания:

$$\Delta p_x = p\sin\theta = p\frac{\lambda}{d}.$$

Запишем волну де Бройля:

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-\varepsilon t)},\ \lambda = \frac{h}{p},$$

$$p = mv, \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно,

$$\Delta p_x = p\frac{\lambda}{d} = \frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d}.$$

Также появляются минимумы, если учесть, что $\sin\theta$ может быть больше ($d\sin\theta = \ n\lambda$). Δp_x называется **неопределенностью в импульсе**. Тогда, поскольку, d будет порядка Δx, то $\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$. Последнее соотношение называется **соотношением неопределенностей**. Если волна встречает на своем пути препятствие, то точно такое же уравнение можно записать для E (энергии) и t (времени).

Задача 2.32. Кинетическая энергия электрона

Оценить энергию электрона, локализованного в области пространства, радиус которого $r \sim 10^{-8}$ см (атом) и $r \sim 10^{-12}$ см (атомное ядро).

Решение.

У электрона $\Delta r \sim r$, $\Delta p \sim \hbar$. Соотношение неопределенностей запишем в форме Вейля:

$$\sigma_p^2\sigma_x^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}.$$

Следовательно, $\Delta p\Delta r \geqslant \frac{\hbar^2}{2}$.

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \geqslant \frac{\hbar^2}{8mr^2}.$$

1. Для атома расчет по этой формуле даёт $E_{\text{кин}} \sim 1$ эВ.
2. Для ядра $E_{\text{кин}} \sim 10^4$ эВ.

Электроны с такой энергией никогда не встречаются в ядре. Отсюда следует вывод: электроны с такими энергиями не могут быть удержаны в ядре, т. к. они не взаимодействуют сильным взаимодействием, а только через электромагнитные силы.

3. Соотношение неопределенностей для энергии и времени

Существует другое соотношение неопределенностей:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar.$$

Приведем рассуждения из учебника Ландау и Лившица.

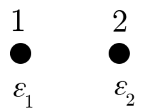

Рис. 2.2

Есть система из двух частиц. Она продемонстрирована на (2.2). Эти частицы слабо взаимодействуют друг с другом. Предположим, в некоторое время были найдены их энергии, причем значения были определены сколь угодно точно. Через время Δt снова измерили энергию, и получились значения $\mathcal{E}_1'$ и $\mathcal{E}_2'$.

$$|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2')|\Delta t \sim \hbar.$$

В квантовой механике закон сохранения энергии не несет абсолютного характера, он может быть проверен с точностью $\frac{\hbar}{\Delta t}$.

Заметим также, что в формуле

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar,$$

Δp и Δx есть неопределенности в один и тот же момент времени, а в формуле для неопределенности по энергии сами энергии измерены в разные моменты времени. То есть в действительности присутствует огромная разница между физическими смыслами в двух разных соотношениях неопределенностей — для энергии и времени, и для координаты и импульса.

Задача 2.31. Кванты ядерного поля

Предполагая, что ядерные силы между нуклонами обусловлены обменом квантами ядерного поля — виртуальными пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что энергия покоя пионов $m_p c^2 \approx 140$ МэВ.

Решение.

Все взаимодействия на самом деле можно объяснить с точки зрения обменных взаимодействий. Например, электромагнитное взаимодействие есть обмен виртуальными фотонами. Внутри ядра сильное взаимодействие обусловлено обменом квантами ядерного поля (π - мезоны).

Энергия π-мезона $\Delta\varepsilon \sim 100$ МэВ, $v \sim c$. Воспользуемся соотношением неопределенностей, записанной внутри ядра

$$\Delta\varepsilon \sim \frac{\hbar}{\Delta t},$$

или

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon}.$$

За какое-то очень маленькое время Δt возникает квант ядерного поля.

В случае, если $\varepsilon > mc^2$, то принято говорить о виртуальной частице, которая если бы могла быть реальной, то имела бы mc^2 энергии покоя.

$$R \leqslant \Delta c \leqslant \frac{h}{\Delta c} c \sim \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Заметим, что величина $\lambda_{\text{к}} = \dfrac{\hbar}{mc} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см называется комптоновской длиной волны. То есть радиус действия этих сил меньше комптоновской длины волны этой частицы.

Задача 2.43. Соотношение неопределенностей

Оценить на основании соотношения неопределенностей радиус атома водорода в основном состоянии и энергию связи электрона в том же состоянии. Определить на основании таких же оценок размер двухатомной молекулы и энергию её основного состояния, рассматривая молекулу как одномерный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 и приведенной массой μ.

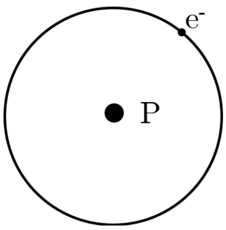

Рис. 2.3

Решение.

Запишем соотношение неопределенностей:

$$\Delta p \cdot \Delta r \sim \hbar,$$

$$\Delta p \sim p, \qquad \Delta r \sim r.$$

Следовательно, полная энергия равна

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}.$$

Соотношение неопределенностей: $p \sim \frac{\hbar}{r}$, поэтому

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}.$$

Атом находится в основном состоянии, значит, в состоянии с начальной энергией. Известно, что всякая система стремится к минимуму энергии. Это называется принцип минимума энергии.

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2r}{r^4} + \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r\frac{\hbar^2}{mc^2} = 0,53 \text{ Å}.$$

Это боровский радиус, который совпал с результатом, получаемым в боровской модели.

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13{,}6 \text{ эВ}.$$

Получено выражение для энергии в основном состоянии атома водорода. Заметим, что через соотношение неопределенностей случайно получен такой же результат, как и в боровской модели. Соотношение неопределенностей — это просто приближенное соотношение, которое дает близкие к правде результаты.

Вторая часть задачи.

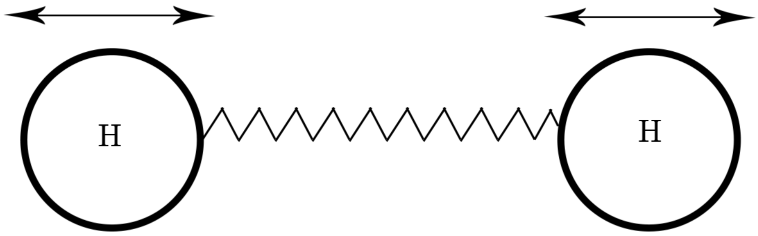

Рис. 2.4

Необходимо оценить размер двух атомной молекулы и энергию её основного состояния. При больших T возбуждаются колебательные степени свободы. Известно, что это гармонический осциллятор имеет частоту ω_0 и приведенную массу μ. Вспомним, что:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\mu}, \qquad \mu = \frac{m_p}{2}.$$

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{kx^2}{2}.$$

Соотношение неопределенностей в форме Вейля:

$$\overline{p^2} \cdot \overline{x^2} \geqslant \frac{\hbar^2}{4}.$$

$$E = \frac{\hbar^2}{8\mu\overline{x^2}} + \frac{k\overline{x^2}}{2} \overset{\text{без усреднения}}{=} \frac{\hbar^2}{8\mu x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega_0 x^2.$$

Условие стационарности энергии:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{d(x^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{8\mu x^4} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 = \frac{\hbar^2}{4\mu^2\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{x^2} = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

Формула правильна. Минимальная энергия осциллятора $\frac{\hbar\omega_0}{2}$. Это энергия нулевых колебаний, она показана на рисунке (2.5).

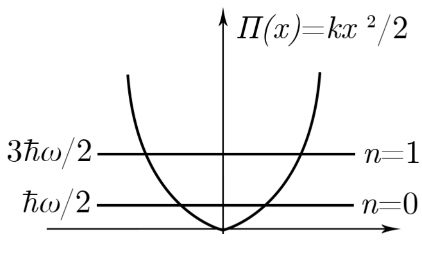

Рис. 2.5

Энергия этого осциллятора не может быть нулевой. В противном случае это означало бы, что частица лежит на дне. Но последнее предположение противоречит соотношению неопределенностей, так как частица не может быть локализована в какой-то точке пространства.

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n\right).$$