ЛЕКЦИЯ 4

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ

Задача 3.25. Туннелирование

На прошлой лекции был рассмотрен **потенциальный барьер**.

Он представлен на (4.1).

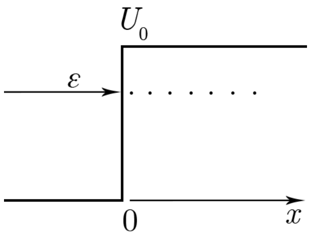


Рис. 4.1

Оказывается, частица проникает под барьер в этом случае, причем достаточно далеко, а потом, в конце концов, отражается. Причем достаточно далеко, а потом, в конце концов, отражается. То есть она живет и под барьером тоже.

Напомним, что **глубина проникновения** — это расстояние, на котором вероятность обнаружения частицы под барьером падает в e раз.

$$\psi \propto \mathrm{e}^{-\kappa x}; \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E).$$

Глубина проникновения равна

$$L = \frac{1}{2\kappa} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}}.$$

1. Прямоугольный барьер

А теперь рассмотрим случай барьера конечной ширины.

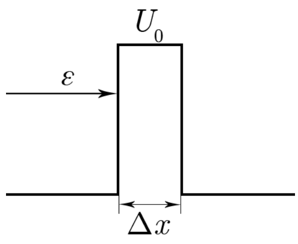


Рис. 4.2

Он представлен на (4.2).

Энергия частицы равна $\epsilon < U_0$.

Коэффициент прохождения частицы под барьером:

$$D = \frac{|\psi|^2_{\text{на выходе}}}{|\psi|^2_{\text{на входе}}}.$$

Также можно ввести вероятность прохождения под барьером за 1 раз:

$$D = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta x}{L}} .$$

Стоит отметить, что последняя формула почти точна, когда барьер не очень широкий.

Пусть есть некая среда. Направляем поток частиц.

Это представлено на (4.3).

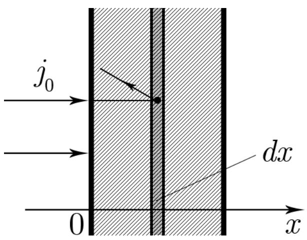


Рис. 4.3

Для **плотности потока вероятности** можем записать:

$$dj(x) = -\frac{dx}{L} j(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dj}{j} = -\frac{dx}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{j(x+\Delta x)}{j(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta x}{L}} .$$

Для прямоугольного барьера имеем:

$$D = D_0 \cdot \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}\Delta x\right)\right\},$$

где $D_0 \approx 1$.

Теперь рассмотрим барьер произвольной формы.

Он представлен на (4.4).

Для нахождения коэффициента прохождения нужно разбить этот барьер на малень-

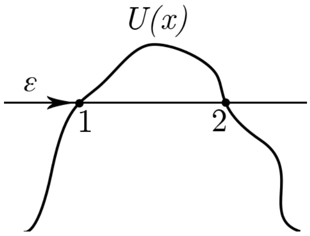


Рис. 4.4

кие прямоугольные барьеры и проинтегрировать. Тогда получим:

$$D = \exp\left\{\left(-\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - \epsilon)}dx\right)\right\}.$$

Задача 3.34. Прямоугольный барьер

Электрон находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме и имеет энергию $\epsilon = 1{,}5$ эВ. Ширина ямы равна $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти высоту потенциального барьера U и его проницаемость D. За какое время τ вероятность найти частицу в яме уменьшится в два раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

Решение.

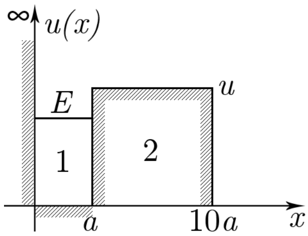


Рис. 4.5

Уравнение Шредингера в яме:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (u-\epsilon)\psi = 0,$$

где $u = 0$.

$$\psi'' + k^2\psi = 0; \quad k = \frac{\sqrt{2m\epsilon}}{\hbar}.$$

Решение имеет вид:

$$\psi_1 = A\sin kx.$$

Здесь уже учтено левое граничное условие $\psi(0) = 0$.

$$\psi_1 = A\sin kx + B\cos kx,$$

$$\psi_1(0) = B; \quad \psi_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1 = A\sin kx.$$

Под барьером:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + (u-\epsilon)\psi = 0,$$

$$\textit{т.к. } \epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad \psi'' - \kappa^2\psi = 0,$$

где $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-\epsilon)}$.

$$\psi_2 = B\,\mathrm{e}^{-\kappa x}.$$

По условию отражением от стенки $10a$ нужно пренебречь.

Нужно воспользоваться условиями **сшивки на границе**. Условия сшивки получаются из того, что для квадрата модуля волновой функции должно быть выполнено 4 условия:

1) Однозначность
2) Непрерывность
3) Гладкость
4) Конечность

В данном случае конечность и однозначность выполняются, а непрерывность и гладкость — нет.

$$\Rightarrow \quad \psi_1(a) = \psi_2(a) \quad \Rightarrow \quad A\sin ka = B\,\mathrm{e}^{-\kappa a},$$

$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a) \quad \Rightarrow \quad Ak\cos ka = -B\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa a},$$

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\kappa} = -\sqrt{\frac{E}{U-E}} \quad \Rightarrow \quad U - E = \frac{E}{\operatorname{tg} ka^2},$$

$$U = E(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} ka^2}) = \frac{E}{\sin ka^2},$$

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{1}{\hbar c}\sqrt{2mc^2E} = 6{,}27\cdot 10^7 \text{ см}^{-1},$$

$$k_a = 1{,}27; \quad U = 1{,}64 \text{ эВ}.$$

Найдем проницаемость барьера:

$$\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)} = 1{,}92\cdot 10^7 \text{ см}^{-1}.$$

Проницаемость барьера:

$$D = \mathrm{e}^{-2\kappa(b-a)},$$

$$b = 10a \quad \Rightarrow \quad D = \mathrm{e}^{-18\kappa a} = 3{,}2\cdot 10^{-5}.$$

Требуется найти время, за которое вероятность остаться в яме упадет в 2 раза. Вероятность остаться в яме равна $1 - D$.

$$(1-D)^{n\tau} = \frac{1}{2},$$

где $n = \frac{v}{2a}$ — частота ударов.

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{v}{2a} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2E}{m}} = 1{,}22\cdot 10^{15} \text{ с}^{-1},$$

$$\Rightarrow \quad n\tau D = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\ln 2}{nD} = 1{,}8\cdot 10^{-11} \text{ с}.$$

Вспомним, что такое **время жизни в яме**. Это промежуток времени, за который вероятность оказаться в яме упадет в е раз. Обозначим T — время жизни в яме.

$$n\tau D = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{nD},$$

где n — частота ударов об данный барьер.

Задача 3.40. Ядерный синтез дейтерия

В 1988 г. появилось сенсационное сообщение об осуществлении холодного ядерного синтеза дейтерия, растворенного в металлическом палладии. Можно считать, что при этом ядра дейтерия взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, если расстояние между ними r удовлетворяет условию $R_1 = 2 \cdot 10^{-13}$ *см* $< r \leq 5 \cdot 10^{-9}$ *см* $= R_2$. При большем расстоянии между ядрами энергия электрического отталкивания $U = 0$ за счет экранирования ядер дейтерия электронами проводимости. Определить вероятность реакции синтеза d+d при столкновении дейтронов внутри палладия при комнатной температуре за счет туннельного эффекта. Считать, что реакция синтеза происходит при $r < R_1$.

Решение.

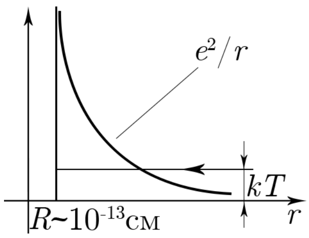


Рис. 4.6

На расстоянии $\sim R = 10^{-12}$ см включается сильное взаимодействие. Для того, чтобы два ядра слились, нужно, чтобы одно ядро прошло через этот барьер (протуннелировал). Все это происходит при комнатной температуре.

$$\frac{\mathrm{e}^2}{R_2} = kT = 0{,}025 \text{ эВ} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{\mathrm{e}^2}{kT} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Кинетическая энергия дейтронов чрезвычайно маленькая.

$$\Rightarrow \quad R_2 \geq r_2 = 10^{-9} \text{ см},$$

$$D = \exp\left\{ \left(-\frac{2}{\hbar} \int\limits_0^{r_2} \sqrt{2\mu \left(\frac{\mathrm{e}^2}{r} - E \right)} dr \right) \right\},$$

где $E = kT$, μ — приведенная масса, и $\mu = \frac{m_d}{2} = m_p = 1{,}69 \cdot 10^{-24}$ *г*.

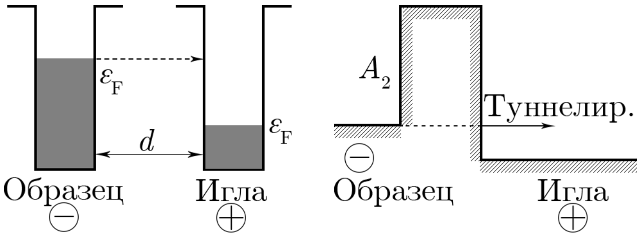
Пренебрегаем E, так как она очень маленькая по сравнению с другим слагаемым в скобке. Пределы берем от 0 до r_2, т. к. r_1 очень маленькое, а при r_2 еще работает закон Кулона.

$$\Rightarrow \quad D = \exp\left\{ \left(-\frac{2\,\mathrm{e}}{\hbar} \int\limits_0^{r_2} \sqrt{\frac{2\mu}{r}} dr \right) \right\} = \exp\left\{ \left(-\frac{2\,\mathrm{e}\sqrt{2\mu}}{\hbar} r_2^{\frac{1}{2}} \right) \right\} = \mathrm{e}^{-235} = 10^{-109}.$$

Следовательно, вероятность чрезмерно маленькая.

2. Туннельный микроскоп

Объясним принцип работы **туннельного микроскопа**.



labelfig:4:8

Рис. 4.7

Есть два различных материала — исследуемый материал и игла. Игла висит над веществом на расстоянии ангстремов. Она может смещаться вдоль по этому материалу, и при ее смещении будет происходить туннелирование электронов из иглы в образец, или наоборот. Итак, происходит туннелирование. И туннельный ток этих электронов зависит от высоты, на которой находится игла. Таким образом, можно найти рельеф плоскости.

Будем пренебрегать тем, что барьер косой, и будем рассматривать такой прямоугольный барьер:

Туннельный ток:

$$I \propto D \sim \exp\left\{\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mA_2}d\right)\right\}.$$

Дебройлевская длина волны электрона:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{12{,}3\ \text{Å}}{\sqrt{E(эВ)}}.$$

$$I \propto D \sim \exp\left\{\left(-\sqrt{A_2}\frac{\sqrt{2m}}{h}2d\right)\right\} = \exp\left\{\left(-\frac{\sqrt{A_2(эВ)}}{12{,}3\text{Å}}2d\right)\right\}.$$

Найдем, во сколько раз изменится ток, если высота барьера уменьшится на Δx:

$$\Delta I = \frac{I(d-\Delta x) - I(d)}{I(d)} = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{A}(d-\Delta x)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{A}d}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{A}d}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{A}\Delta x} - 1.$$

$$A = 1\ эВ.$$

$$\Delta x = 1\ \text{Å}.$$

$$\Rightarrow \quad \Delta I = \mathrm{e} - 1.$$

Задача 3.11. Одномерная яма с бесконечно высокими стенками

Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m, локализованной в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна $2a$.

Решение.

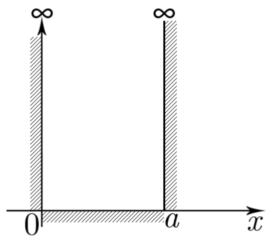


Рис. 4.8

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0, a); \\ \infty, & \text{если } x \leq 0, x \geq a; \end{cases}$$

Следовательно, проникновение под барьер невозможно.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi,$$

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0,$$

где $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$.

Из граничного условия на левой границе следует:

$$\psi(x) = A\sin kx.$$

Граничное условие на правой границе дает:

$$A\sin ka = 0\ (\psi(a) = 0) \Rightarrow \quad k_n a = \pi n \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{\pi}{a}n,$$

где $n = 1, 2, 3, ...$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2.$$

Найдем A:

$$\int_0^a \psi^*\psi dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2\int_0^a \sin kx^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \mathrm{e}^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}.$$

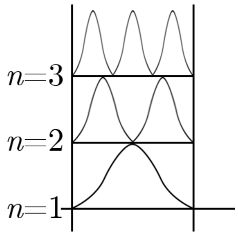


Рис. 4.9

Заметим, что $n = 0$ не может быть, потому что тогда электрон покоится на дне, и это противоречит **соотношению неопределенностей**. Следовательно, основное состояние есть $n = 1$.

Изобразим $|\psi|_n^2$. Она представлена на рисунке (4.9).

В бесконечности ($n \longrightarrow \infty$) получается классический предел, то есть равновероятно можно найти частицу в любой части ямы. Число горбов растет, и сливается в одно целое. Эти де Бройлевские волны этого состояния (ψ-функции) есть стоячие волны. А условие стоячести – целое число полуволн $a = n\frac{\lambda}{2}$.

$$\Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2a}{n} = \frac{2\pi\hbar}{p_n} = \frac{2\pi}{k_n},$$

$$\Rightarrow \quad k_n = \frac{\pi}{a}n \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$