ЛЕКЦИЯ 5

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЯМЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

В прошлый раз рассматривалась потенциальная **яма с бесконечно высокими стенками**. Было показано, что в этом случае имеет место квантование. Частица, находящийся в яме с бесконечно высокими стенками, может занимать не любое положение, а только строго определенное. Есть дискретный набор уровней, на которых может находится частица. То есть, в яме с бесконечными стенками происходит дискретизация состояний частицы. Было указано значение этой энергии, решено уравнение Шредингера в этих условиях.

Задача 3.13. Яма с бесконечными стенками, заполненная электронами

В одномерной потенциальной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить минимальное значение полной энергии $\epsilon_{\min}$ и силу давления F электронов на стенки ямы. Взаимодействием электронов пренебречь.

Решение.

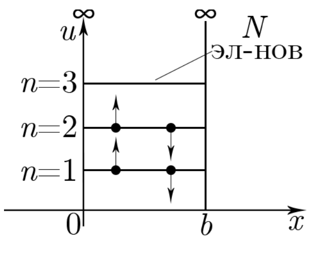

Рис. 5.1

Энергия одного электрона на n-м уровне равна:

$$\epsilon_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}n^2.$$

На каждом энергетическом уровне могут находиться не более двух электронов.

$$\epsilon_{\min} = 2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} n^2.$$

Вспомним формулу:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} n^2 = \frac{N(N+2)(N+1)}{24},$$

$$\epsilon_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{mb^2}\frac{N(N+2)(N+1)}{24}.$$

Это есть полная энергия этих электронов.
Давление рассчитывается по формуле:

$$F = -\frac{\partial E_{\min}}{\partial b},$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\pi^2\hbar^2}{mb^2}\frac{N(N+2)(N+1)}{12}.$$

Задача. Прохождение нейтронов через щель

Поток нейтронов падает на длинную щель с абсолютно отражающими стенками. При какой минимальной скорости нейтроны смогут пройти через эту щель?

Решение.

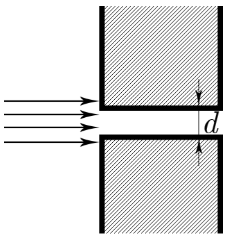

Рис. 5.2

Если бы нейтроны были частицами, они бы прошли щель без проблем. Но нейтроны — это не волны Уместно вспомнить волновод. Как показывалось в курсе оптики, не всякая волна может войти в волновод. Поэтому, эту задачу можно решить рассматривая щель как **волновод**. Просто в квантовой физике волна совершенно другой природы, это не электромагнитная волна, а волна де Бройля. Щель для нейтронов выступает в роли ямы с бесконечными стенками. Следовательно, для нейтрона возникают уровни энергий. Следовательно, если энергия нейтрона равна энергиям этих уровней, то нейтрон в щель войдет, и там навсегда останется. То есть у него компонента скорости вдоль начального направления будет нулевая. Если энергия больше, то нейтрон пройдет через эту щель.

$$\epsilon_{кин} = \frac{mv^2}{2} > E_1 \ (при\ n=1) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2},$$

$$\Rightarrow \quad v \geq \frac{\pi\hbar}{md} \approx 20\ \frac{см}{c}.$$

Эта задача аналогична задаче 3.14

Задача 3.33. Эффект Рамзауэра

В 1920 г. Рамзауэр обнаружил, что в сечении рассеяния σ_s медленных электронов на атомах криптона имеется глубокий минимум (резко увеличивается проницаемость атомов) при энергии $\epsilon = 0{,}6$ эВ. Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Считая, что для электрона потенциал атома является одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = 2{,}5$ эВ, оценить радиус атома криптона.

Решение.

На рисунке (**??**) показан график зависимости сечения рассеяния электронов от их энергии.

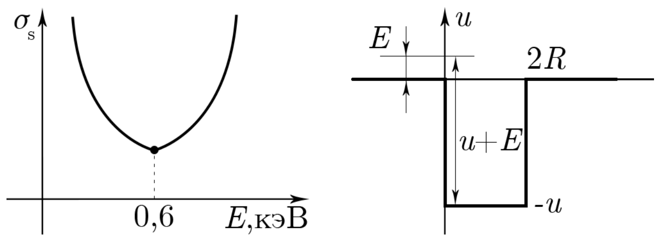

Рис. 5.3

Сечение рассеяния — это вероятность рассеяться.

Нарисуем потенциальную яму (5.3):

Энергия E маленькая по сравнению со значением потенциала.

Несмотря на то, что энергия электрона выше нулевого уровня, он может захватиться.

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U+E)},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{\sqrt{2m(U+E)}}.$$

В этой яме должно упаковываться целое число длин полуволн де Бройля. Это есть ключ к решению этой задачи.

Условие резонанса:

$$2R = \frac{\lambda}{2}.$$

Это самое минимальное значение самого основного состояния. Остальные значения нереализуемы.

Поэтому:

$$R = \frac{\lambda}{4} = \frac{h}{4\sqrt{2m(U+E)}} = 1{,}74 \cdot 10^{-8}\ см.$$

В экспериментах получается значение 1,98 Å. Заметим, что не было решено уравнение Шредингера.

Задача 8.24. Прохождение ультрахолодных нейтронов над горизонтальной пластинкой

Ультрахолодные нейтроны выходят широким пучком из горизонтального нейтроновода и затем движутся свободно над горизонтально расположенной пластинкой, упруго от нее отражаясь и тем самым совершая периодическое движение. Это движение в гравитационном поле квантуется, и поэтому пройдут над пластинкой только те нейтроны, у которых высота движения H соответствует разрешенной энергии. Оценить на основе правила квантования Бора–Зоммерфельда какова третья разрешенная высота

Решение.

У ультрахолодных нейтронов скорости составляют несколько $\frac{м}{c}$. Они могут накапливаться.

Движение нейтронов показана на рисунке (5.4):

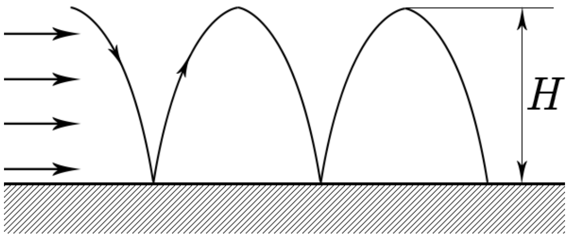

Рис. 5.4

Запишем **правило квантования Бора–Зоммерфельда**:

$$\oint p\,dz = nh,$$

Закон сохранения энергии:

$$\epsilon = mgH = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = 2m\epsilon - 2m^2gz \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m(\epsilon - mgz)},$$

$$\oint pdz = nh = 2\int\limits_0^H \sqrt{2m(\epsilon - mgz)}dz = \frac{4}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(mgH)^{\frac{3}{2}} = nh,$$

$$h^{\frac{3}{2}} = \frac{3nh}{4m\sqrt{2g}} = 0{,}2\cdot 10^{-3}\ см^{\frac{3}{2}},$$

$$\Rightarrow \quad (2\cdot 10^{-4})^{\frac{2}{3}} = 0{,}034\ мм.$$

Задача 3.27. Возбуждённый электрон в одномерной яме

Электрон, находящийся в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной $a = 4$ Å и глубиной $U_0 = 10$ эВ, переведен в возбужденное состояние с энергией $\epsilon \approx 10^{-2}$ эВ (нуль отсчета энергии — состояние покоя вне ямы). Оценить время жизни

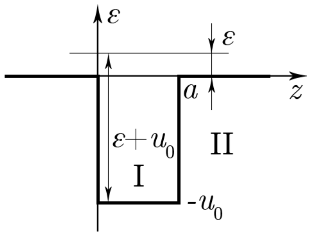

Рис. 5.5

возбужденного состояния, считая, что оно ограничивается вылетом электрона из ямы, а не переходом в основное состояние.

Решение.

Такую задачу следовало бы решить через **нестационарное уравнение Шредингера**. Но предлагают сделать оценку. Предположим, рассматриваемый электрон уже оказался в возбужденном состоянии.

Вспомним **коэффициент прохождения** над ступенькой:

$$D = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2},$$

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon + U_0); \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon.$$

Подставим эти значения в D:

$$D = 4\frac{\sqrt{\epsilon(\epsilon+U_0)}}{(\sqrt{\epsilon+U_0}+\sqrt{\epsilon})^2}.$$

ϵ много меньше U_0.

$$\Rightarrow \quad D \approx 4\sqrt{\frac{\epsilon}{U_0}}$$

— вероятность уйти за 1 раз.

Скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2(U_0+\epsilon)}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Частота ударов о барьер:

$$n = \frac{v}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Время жизни:

$$(1-D)^{n\tau},$$

где $D \ll 1$.

$$n\tau D = 1,$$

$$\tau \approx \frac{1}{nD} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{m}{2U_0}}\sqrt{\frac{U_0}{\epsilon}} = \frac{a}{4\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}} \approx 10^{-15} \ c.$$

Задача 3.48. Прямоугольная яма с одной бесконечной стенкой

Нейтрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с шириной $a = 1{,}3 \cdot 10^{-13}$ см, ограниченной с одной стороны бесконечно высокой стенкой. При этом U_0 при $0 < x < a$, а при $x \geq a$ потенциал U равен постоянной конечной величине U_0. Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0{,}1$. Считая, что максимум волновой функции достигается вблизи границы ямы, определить энергию связи нейтрона.

Решение.

Яма показана на рисунке (5.6).

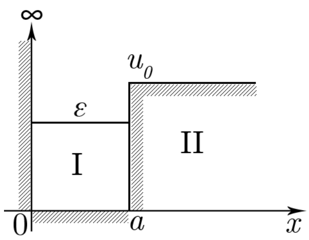

Рис. 5.6

Освобождение означает $\epsilon = U_0$.

Оказывается, что в **трехмерной яме** связанные уровни энергии есть не всегда. Это легко понять на некоторых примерах. Например, невозможно составить связанного состояния двух нейтронов. Такая конструкция не образовывает атом. Для образования конструкции типа атома нужны нейтрон и протон. Такая комбинация называется **дейтрон**. Дейтрон возможен.

Следовательно, в трехмерном случае существуют ямы, в которых не возможен ни один уровень. Трехмерная задача сводится к задаче той формы, которая в этой задаче представлена. В одномерном случае всегда есть уровни.

Запишем уравнение Шредингера за пределами ямы:

$$\psi'' - \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon)\psi = 0.$$

Сделаем некоторые обозначения:

$$\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon) = \varkappa^2; \quad \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon = k^2.$$

Решение принимает вид:

$$\psi_{\mathrm{I}} = A \sin kx,$$
$$\psi_{\mathrm{II}} = B\,\mathrm{e}^{-\varkappa x}.$$

Условие сшивки:

$$A \sin ka = B\,\mathrm{e}^{-\varkappa a},$$
$$Ak \cos ka = -B\varkappa\,\mathrm{e}^{-\varkappa a},$$
$$\Rightarrow \quad k \operatorname{ctg} ka = -\varkappa,$$

$$\varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - \epsilon) = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{U_0}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ctg} ka = -\frac{\varkappa}{k} = \frac{\sqrt{\frac{U_0}{4}}}{\sqrt{\frac{3U_0}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad ka = \frac{2\pi}{3}.$$

Мощность ямы — это $U_0 a^2$.
Начальная мощность ямы:

$$k^2a^2 = \frac{4\pi^2}{9} = \frac{3mU_0}{2\hbar}a^2 \quad \Rightarrow \quad U_0 a^2 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{27m}.$$

Частица свободна при условии $\epsilon = U$.

$$\operatorname{ctg} ka_x = 0 \quad \Rightarrow \quad ka_x = \frac{\pi}{2}.$$

Конечная мощность ямы:

$$U_0 a_x^2,$$

$$k^2 a_x^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{2mU_0}{\hbar^2}a_x^2 \quad \Rightarrow \quad U_0 a_x^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8m},$$

$$\frac{a}{a_x} = 1{,}54.$$

Задача 3.47. Одномерная симметричная прямоугольная яма

Электрон находится в основном состоянии в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме с шириной $2a = 10$ Å с потенциалом $U(\pm\infty) = 0$. Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0{,}1$. Считая, что изменение волновой функции внутри ямы мало, определить энергию связи электрона и глубину ямы (эВ).

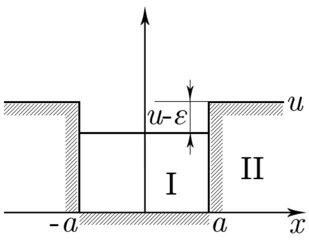

Рис. 5.7

Решение.

Относительная вероятность обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0{,}1$.

$$2a = 10 \text{ Å},$$

$$\frac{w_{\text{внутр}}}{w_{\text{вне}}} = \alpha = 0{,}1.$$

Энергией связи называется величина $U_0 - \epsilon$.

Считаем, что внутри ямы ψ почти константа

$$\text{I}: \quad \psi_{\text{I}}'' + \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon\psi = 0,$$

$$\text{II}: \quad \psi_{\text{I}}'' \frac{2m}{\hbar^2}(U - \epsilon)\psi = 0,$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon; \quad \varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U - \epsilon).$$

Решения:

$$\text{I}: \quad \psi_{\text{I}}(x) = \cos kx,$$

$$\text{II}: \quad \psi_{\text{II}}(x) = A\,\mathrm{e}^{-\varkappa x}.$$

Сшивка:

$$\cos ka = A\,\mathrm{e}^{-\varkappa a}.$$

$$k \sin ka = A\varkappa\,\mathrm{e}^{-\varkappa a}.$$

Получается:

$$\operatorname{tg} ka = \frac{\varkappa}{k} = \sqrt{\frac{U - \epsilon}{E}},$$

$$1 + \operatorname{tg} ka^2 = \frac{U}{E} = \frac{1}{\cos ka^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos ka = \sqrt{\frac{\epsilon}{U}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2mU}} = \frac{\hbar^2}{2mUa^2} ka.$$

Условие малости изменения внутри ямы:

$$ka \ll 1.$$

Из **условий сшивки** приближенно получаем:

$$k \cdot ka \approx \varkappa A\,\mathrm{e}^{-\varkappa a},$$

$$1 \approx A\,\mathrm{e}^{-\varkappa a},$$

$$k^2 a \approx \varkappa.$$

Вероятность обнаружения частицы в яме:

$$w_1 = 2\int\limits_0^a \psi_1^2(x)dx \approx 2a.$$

Вероятность обнаружения частицы вне ямы:

$$w_2 = 2\int\limits_0^\infty \psi_2^2(x)dx = 2A^2\int\limits_a^\infty \mathrm{e}^{-2\varkappa x}\,dx = \frac{A^2}{\varkappa}\,\mathrm{e}^{-2\varkappa a},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{w_1}{w_2} = \alpha = \frac{2a}{\frac{A^2}{\varkappa}\,\mathrm{e}^{-\varkappa a}},$$

$$A\,\mathrm{e}^{-\varkappa a} \approx 1 \Rightarrow \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{2a\varkappa}{1} = 2k^2a^2 \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\alpha}{2a}; \quad k^2 = \frac{\alpha}{2a^2}.$$

Итак,

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\epsilon; \quad \varkappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U-\epsilon),$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\alpha}{2a^2}\frac{\hbar^2}{2m} = \frac{\alpha\hbar^2}{4ma^2} = 7{,}63\cdot 10^{-3}\ \text{эВ},$$

$$\Rightarrow \quad U-\epsilon = \frac{\varkappa^2\hbar^2}{2m} = \frac{\alpha^2\hbar^2}{8ma^2} = 3{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{эВ},$$

$$\Rightarrow \quad U = 8\cdot 10^{-3}\ \text{эВ}.$$

Задача 3.46. Прохождение частицы над одномерной прямоугольной ямой

При прохождении нерелятивистской частицы с энергией ϵ над одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = -3\epsilon$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = \frac{9}{25}$. Определить минимально возможную глубину ямы в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны. Воспользоваться известным из оптики условием, что при отражении от оптически более плотной среды фазы отраженной и падающей волн отличаются на π.

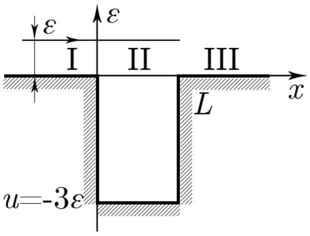

Рис. 5.8

Решение.

Воспользуемся условием из оптики, что при таком отражении фаза меняется на π.

В свободном пространстве (I и III) $U = 0$.

$$\Rightarrow \quad k_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\epsilon}.$$

В яме (в области II):

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(4\epsilon)}k_0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{k_0} = 2 = n.$$

Заметим, что это и есть показатель преломления этой среды над ямой.

Яма — это среда с показателем $n > 1$ ($n = 2$). Все рассуждения аналогичны рассуждениям в курсе оптики.

Тогда $r = -\sqrt{R} = -\frac{3}{5}$.

$$\psi_1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{ik_0x} + r \cdot \mathrm{e}^{-ik_0x},$$

$$\psi_2 = a \cdot \mathrm{e}^{ikx} + b \cdot \mathrm{e}^{-ikx},$$

$$\psi_3 = d \cdot \mathrm{e}^{ik_0x}.$$

Сшивка при $x = 0$:

$$1 + r = a + b,$$

$$1 - r = \frac{k}{k_0}(a - b) = 2a - 2b,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = -3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{5}; \quad b = -\frac{1}{5}.$$

Сшивка при $x = L$:

$$a\,\mathrm{e}^{ikL} + b\,\mathrm{e}^{-ikL} = d\,\mathrm{e}^{ik_0L},$$

$$a\,\mathrm{e}^{ikL} - b\,\mathrm{e}^{-ikL} = \frac{k}{k_0}d\,\mathrm{e}^{ik_0L}.$$

Обозначим $\mathrm{e}^{ikL} = z$.

$$\Rightarrow \quad \frac{3z^2-1}{3z^2+1} = \frac{k}{k_0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{az + \frac{b}{z}}{az - \frac{b}{z}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3z^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1,$$

$$\mathrm{e}^{ikL} = \pm i = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}} = z,$$
$$\Rightarrow \quad kL_{\min} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad l_{\min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4}.$$