ЛЕКЦИЯ 7

ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА. СПИН. СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ. ТЕРМ

1. Орбитальное движение электрона

Нарисуем картину орбитального движения электрона. Она представлена на рисунке (7.1).

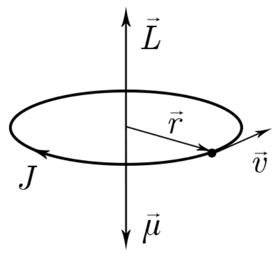

Рис. 7.1

Для момента импульса можем записать следующее соотношение:

$$\vec{L} = [\vec{r} m \vec{v}].$$

Найдем связь между моментом импульса и магнитным моментом электрона:

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c}\vec{S} = \frac{1}{c}\frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 \vec{n} = -\frac{e}{2c} r v \vec{n} \frac{m}{m} = -\frac{e}{2mc}\vec{L}.$$

Запишем выражение для магнитного момента электрона через **гиромагнитное отношение** Γ:

$$\mu = -g_l \cdot \Gamma \cdot \vec{L},$$

где $g_l = 1$ — орбитальный g-фактор.

Вспомним **квантование проекции момента импульса на какую-то ось** z:

$$L_z = m\hbar.$$

В последней формуле m принимает значения:

$$m = 0,\ \pm 1,\ \ldots\ \pm l.$$

Возьмем проекцию магнитного момента на ось z:

$$\mu_{\text{lz}} = -g_l \Gamma L_z = g_l \Gamma \hbar m_l.$$

Введем новую величину — **магнетон Бора**.
Она равна

$$\mu_Б = \Gamma\hbar = \frac{e\hbar}{2mc} = 0{,}927 \cdot 10^{-20}\ \frac{\textit{эрг}}{\textit{Гс}}.$$

А для проекции магнитного момента можно записать:

$$\mu_{\text{lz}} = g_l \mu_Б m_l.$$

В этой формуле m принимает значения:

$$m_l = 0,\ \pm 1,\ \ldots\ \pm l,\ (2l+1)\ \textit{значения}.$$

2. Спин. Опыты Штерна – Герлаха

На виток с током, помещенном в неоднородное магнитное поле, действует сила. Рассматривается опыт Штерна – Герлаха. Схема этого опыта представлена на рисунке (7.2).

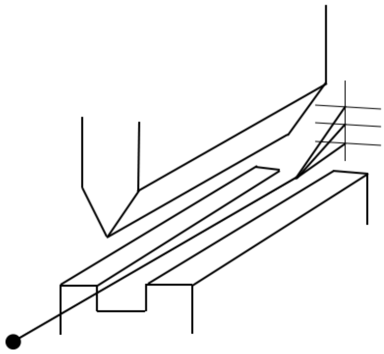

Рис. 7.2

Источник (на рисунке это точка снизу) посылает атомы. Они расщепляются. На выходе пучок расщепится на линии по значению проекции магнитного момента на ось их первоначального движения. Таким образом получится $(2l + 1)$ линий.

На опыте Штерн и Герлах получили две линии. Объяснилось это с введением нового понятия — **спина**. Спин эквивалентен собственному магнитному моменту электрона.

Введем еще одно новое понятие — **мультиплетность**.

$$\textit{Мультиплетность} = 2S + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2},$$

$$m_S = \pm\frac{1}{2}, \quad m_S^{\max} = S = \frac{1}{2},$$

$$S_z = \hbar m_s = \pm\frac{1}{2}\hbar,$$

$$S^2 = \hbar^2 S(S+1).$$

Аналогичное соотношение есть для орбитального магнитного момента:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad \Rightarrow \quad S^2 = \frac{3}{4}\hbar.$$

Получается, спин может быть направлен исключительно по или против движения. Никаких промежуточных значений нет.

Найдем соответствующий спину магнитный момент:

$$\mu_s z = g_s \mu_Б m_s.$$

В эксперименте оказалось, что

$$\frac{\mu_s z}{S_z} = -\frac{e}{mc} = g_s\Gamma, \quad \Rightarrow \quad g_s = 2.$$

Запишем, чему равна сила, действующая на магнитный момент, помещенный в неоднородное магнитное поле:

$$\vec{F} = (\vec{\mu}\vec{\nabla})\vec{B} \quad \Rightarrow \quad F_z = \mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

В этой формуле $\mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \approx 0$, потому что время пролета этой частицы через этот магнит достаточно большое, и за это время частица совершает свое прецессионное вращение в этом магнитном поле. Для прецессионного вращения имеем:

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi \cdot 2mc}{eB} \approx 7 \cdot 10^{-10} \ с.$$

Время пролета через магнит:

$$v = 100 \ \frac{м}{с}, \quad l = 1 \ м, \quad \Rightarrow \quad t \approx 0{,}1 \ с.$$

Задача 6.15. Опыт Штерна–Герлаха

Параллельный пучок нейтронов с энергией $T = 0{,}025$ эВ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0{,}1$ мм и затем через зазор в магните Штерна–Герлаха длиной $L = 1$ м. Оценить значение градиента поля $\frac{dB}{dx}$, при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = 9{,}66 \cdot 10^{-24} \ \frac{эрг}{Гс}$.

Решение.

При прохождении через коллимирующую щель происходит дифракционное уширение. А так как пучок потом расщепляется в зазоре магнита, компоненты пучка могут слиться, и тогда исчезнет расщепление.

Это представлено на рисунке (7.3). Справа — это экран, и на нем видна просто толстая полоса, а не расщепление.

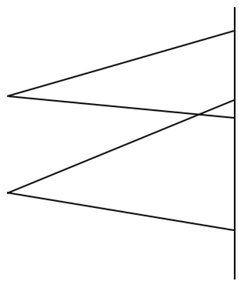

Рис. 7.3

Магнитный момент нейтрона равен

$$\mu_n = 0{,}966 \cdot 10^{-23} \ \frac{эрг}{Гс} = \frac{\mu_Б}{960}.$$

Заметим, что у нейтрона есть магнитный момент, хотя он является нейтральной частицей. Магнитный момент появляется из-за того, что нейтрон состоит из заряженных частиц. Нейтрон — частица **сильного взаимодействия**, и состоит из трех **кварков**.

Сила, действующая на нейтрон:

$$f_z = m_{\text{n}} \cdot a_\perp = \mu \frac{\partial B}{\partial z},$$

$$a_\perp = \frac{v_\perp}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{v_\parallel}.$$

Угол между компонентами скорости представлен на рисунке (7.4).

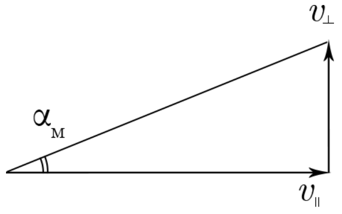

Рис. 7.4

$$f_z = m_{\text{n}} \frac{v_\perp v_\parallel}{L} = \mu \frac{dB}{dz} \quad \Rightarrow \quad v_\perp = \frac{\mu \frac{dB}{dz}}{m} \frac{L}{v_\parallel}.$$

Дифракционное уширение равно

$$\alpha_{\textit{диф}} \simeq \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d\sqrt{2mE}},$$

$$\alpha_{\textit{магн}} = \frac{v_\perp}{v_\parallel} = \frac{\mu \frac{dB}{dz} L}{m v_\parallel^2} = \frac{h}{d\sqrt{2mE}},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{2Eh}{L\mu_{\text{n}} d\sqrt{2mE}} = 150 \ \frac{\textit{Гс}}{\textit{см}}.$$

3. Энергия ферромагнетика в магнитном поле

Расположим ферромагнетик в магнитном поле. Ферромагнетик висит на нитке. Он намагничен. Это представлено на рисунке (7.5).

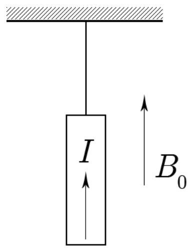

Рис. 7.5

Энергия магнитного момента в магнитном поле равна:

$$E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Для рассматриваемого куска железа магнитный момент равен:

$$\mu = IV,$$

где I — это *намагниченность*. Это есть магнитный момент единицы объема.

Если поле повернуть на 180°, то энергия поменяется:

$$\Delta E = 2\mu B.$$

Задача 6.9. Опыты Эйнштейна и де Гааза

С какой угловой скоростью ω и в каком направлении должен начать вращаться цилиндр, подвешенный магнитном поле B, направленном параллельно его оси вертикально вверх, если изменить направление поля на обратное? Считать, что цилиндр намагничивается до насыщения. Момент импульса электрона в атоме равен l, число атомов в цилиндре N, момент инерции цилиндра I.

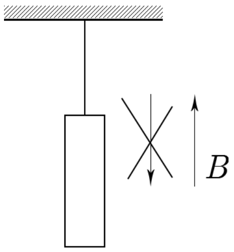

Рис. 7.6

Решение.

Момент импульса цилиндра:

$$I\omega = 2kN \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2lN}{I}.$$

Задача 6.10. Опыты Эйнштейна и де Гааза

Какое значение для ω следует ожидать в упрощенном опыте Эйнштейна – де Гааза, если длина цилиндра $L = 1$ см, его масса $m = 1$ г, цилиндр сделан из железа и если предположить, что момент импульса каждого атома равен таковому для электрона на первой боровской орбите?

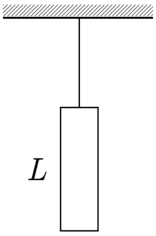

Рис. 7.7

Решение.
Момент импульса атома равен $\hbar$.
Момент инерции цилиндра:

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Посчитаем число атомов:

$$N = \frac{m}{A} N_{\text{A}},$$

$$\omega = \frac{2N\hbar}{0{,}5mr^2} = \frac{4N\hbar}{mr^2} = \frac{4N_{\text{A}}\hbar m}{Amr^2} \cdot \frac{\pi\rho L}{\pi\rho L} = \frac{2N_{\text{A}} h\rho L}{Am} = 1{,}12 \cdot 10^{-3}\ c^{-1}.$$

4. Сложение моментов импульса

У частицы есть собственный и орбитальный моменты. Их сумма называется **полным моментом**.

У всякой такой системы вектор $\vec{J}$ является **интегралом движения**. Он сохраняется. А остальные векторы прецессируют вокруг него.

Если механические моменты возьмем в единицах $\hbar$, а магнитные моменты возьмем в единицах $\mu_Б$, то тогда длина вектора орбитального механического момента будет равна длине вектора орбитального магнитного момента. Вспомним, что $g_l = 1$ и $g_s = 2$, поэтому длина спинового магнитного момента будет вдвое больше длины спинового механического момента.

Так как $\vec{J}$ есть интеграл движения, то все остальные векторы вращаются вокруг него, и, соответственно, $\mu_{\vec{сум}}$ тоже. То есть этот вектор имеет проекцию на направление $\vec{J}$.

Все эти рассуждения представлены на картинке (7.8).

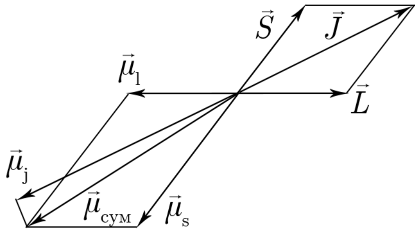

Рис. 7.8

В классическом случае для нахождения проекции нужно было просто умножить на косинус угла между этими векторами, но в квантовом случае проекция находится специальным образом — через **фактор Ланде**. На самом деле, эта проекция $\vec{\mu_{сум}}$ на направление $\vec{J}$ и называется магнитным моментом атома.

$$\vec{\mu_j} = -g\mu_Б\vec{J}, \quad \vec{\mu_j}\overline{\mu_{сум}} = -g\mu_Б\vec{J},$$

$$\vec{\mu_{сум}} = \vec{\mu_L} + \vec{\mu_S} \quad \vec{\mu_L} = g_l\mu_Б\vec{L},$$

$$\vec{\mu_S} = g_s\mu_Б\vec{S}, \quad (\vec{\mu_L} + \vec{\mu_S})\,\vec{J} = g\mu_Б\vec{J}\vec{J},$$

$$g_l\mu_Б\overline{\vec{L}\vec{J}} + g_s\mu_Б\overline{\vec{S}\vec{J}} = g\mu_Б\overline{\vec{J}^2}, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{J} - \vec{L},$$

$$\overline{S^2} = \overline{J^2} + \overline{L^2} - 2\overline{\vec{J}\vec{L}},$$

$$\overline{\vec{J}\vec{L}} = \frac{1}{2}\left(\overline{J^2} + \overline{L^2} - \overline{S^2}\right), \quad \overline{\vec{J}\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\overline{J^2} + \overline{S^2} - \overline{L^2}\right).$$

Средние значения в квантовой механике равны:

$$\overline{J^2} = J(J+1), \quad \overline{L^2} = L(L+1), \quad \overline{S^2} = S(S+1),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{g_l}{2}\left(\overline{J^2} + \overline{L^2} - \overline{S^2}\right) + \frac{g_s}{2}\left(\overline{J^2} + \overline{S^2} - \overline{L^2}\right) = g\overline{J^2},$$

$$g = \frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_s - g_l}{2}\frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}.$$

Получим фактор Ланде для электронов в атоме

$$g_l = 1, \quad g_s = 2,$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

5. Терм

Рассматриваем атом водорода. Можно характеризовать состояние атома четырьмя числами таким образом:

$$n^{2S+1}l_J.$$

Совокупность этих четырех чисел, характеризующая состояние атома, называется **терм**.

Для орбитального квантового числа можно составить таблицу соответствия со спектроскопическими обозначениями.

	S	P	D	F	G
l	0	1	2	3	4

6. Радиальное квантовое число

Вернемся к атому водорода.

n_r — **радиальное квантовое число**. **Радиальное квантовое число показывает сколько нулей у волновой функции от нуля до бесконечности**.

$$n_r = n - l - 1.$$

Максимальное значение l — это $n-1$.
Всего состояний — $2n^2$.

n	n_r	l	m_l	s	j	Состояние	Кратность вырождения
1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1^2S_{\frac{1}{2}}$	2
2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2S_{\frac{1}{2}}$	8
	0	1	$0, \pm 1$		$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$2P_{\frac{1}{2}}, 2P_{\frac{3}{2}}$	
	2	0	0		$\frac{1}{2}$	$3S_{\frac{1}{2}}$	
3	1	1	$0, \pm 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$3P_{\frac{1}{2}}, 3P_{\frac{3}{2}}$	18
	0	2	$0, \pm 1, \pm 2$		$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$	$3D_{\frac{5}{2}}, 3D_{\frac{3}{2}}$	

7. Спин-орбитальное взаимодействие

Случай, когда кратность вырождения не равна нулю, означает, что для этого значения главного квантового числа существует несколько состояний с одинаковой энергией. В действительности это не так. Объясним это. Электрон движется на своей электронной оболочке. В системе отсчета электрона протон вращается вокруг электрона. И получается, что собственный магнитный момент электрона находится в магнитном поле, порожденном движением протона вокруг электрона. Это называется **спин-орбитальным взаимодействием**.

В системе отсчета электрона возникает магнитное поле:

$$B_l = \frac{e}{cr^3} vr = \frac{ev}{cr^2}.$$

На первой **боровской орбите**:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{mr_1} = \frac{e^2}{m \cdot \frac{\hbar^2}{me^2}} = \frac{e^4}{\hbar^2}.$$

Таким образом, скорость электрона на первой боровской орбите равна:

$$v_1 = \frac{e^2}{\hbar} \frac{c}{c} = \alpha c,$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ — **постоянная тонкой структуры**.

$$B_l = \frac{\alpha e}{r^2}.$$

Если магнитный момент находится в магнитном поле, то он может быть направлен или по полю, или против поля. И из-за этого энергия конкретного уровня с конкретным значением главного квантового числа расщепляется.

$$\Delta U_{\text{ls}} = -\left(\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l\right) = \mu_Б \cdot B_l \cdot m_l.$$

То есть происходит расщепление по квантовому числу l.

$$|\Delta U_{\text{ls}}| = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{e\alpha}{r^2} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \alpha^2.$$

$\frac{me^4}{2\hbar^2} = \epsilon_1$ — на первом (боровском) уровне.

$$\frac{\Delta U}{\epsilon_1} = \alpha^2 \approx 5 \cdot 10^{-5}.$$

Это расщепление, вызываемое спин-орбитальным взаимодействием называется **тонкой структурой**.