
ЛЕКЦИЯ 12

ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Задача 7.14. Оболочечная модель ядра

Согласно оболочечной модели ядра нейтроны и протоны независимо заполняют потенциальную яму. Определить число нуклонов A , которые могут располагаться на трех первых ядерных оболочках, считая потенциальную яму трехмерной параболической.

Решение.

Нарисуем трехмерную параболическую яму. Она представлена на рисунке (12.1).

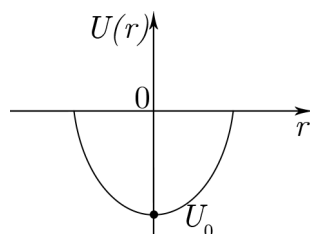


Рис. 12.1

Форма потенциала — это коллективный результат взаимодействия, то есть этот потенциал определяет не какое-то определенное внешнее поле, а создают все частицы вместе.

Запишем потенциал, в котором находятся эти протоны и нейтроны:

$$U(r) = U_0 + \frac{M\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi + U\psi = E\psi.$$

Представим, что все три координаты x , y и z являются абсолютно независимыми. Отсюда следует, что решение этого уравнения (волновая функция), которое является

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2

функцией от x , y и z , должно быть равно:

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Квадрат модуля волновой функции — это вероятность найти данную частицу в какой-то определенной точке пространства. Как известно из теории вероятности, независимые вероятности умножаются. Это было использовано здесь.

Подставим эту волновую функцию в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \cdot (X''YZ + Y''XZ + Z''XY) + UXYZ = EXYZ.$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на
pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Можно разбить последнее выражение на три уравнения:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{X''}{X} + \frac{M\omega^2 x^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{Y''}{Y} + \frac{M\omega^2 y^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2M} + \frac{Z''}{Z} + \frac{M\omega^2 z^2}{2}\right) = E - U_0.$$

Уравнение состоит из трех частей. Каждая из них является **уравнением Шредингера одномерного осциллятора**.

$$-\frac{\hbar^2}{2M}X'' + \frac{M\omega^2 x^2}{2}X = \frac{E - U_0}{3}X.$$

Это и есть уравнение осциллятора. Решение этого уравнения есть:

$$\hbar\omega \cdot \left(n_x + \frac{1}{2}\right).$$

Уровни энергии будут эквидистантны. Просуммируем для всех координат:

$$\hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2}\right) = E - U_0,$$

$$E_N = U_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2}\right),$$

$$N = n_x + n_y + n_z.$$

Таким образом, получено решение для трехмерного гармонического осциллятора.

Согласно **оболочечной модели ядра** протоны и нейтроны создают самосогласованный потенциал, то есть каждый из этих частиц участвует в создании этого потенциала, и всякий лишний нуклон меняет вид этого потенциала. Требуется определить число нуклонов, которые могут располагаться на первых трех ядерных оболочках, считая яму трехмерной. Для легких атомов нарисованный потенциал правильный. Ниже парабола начинает искажаться, сначала превращаясь в «кастрюлю», а потом — в прямоугольную яму.

Построим таблицу для ядра.

N	n_x	n_y	n_z	Число нуклонов	Элемент
0	0	0	0	$1 \times 2 = 2 \Rightarrow Z=N=2$	${}^4_2\text{He}$ (α -частица)
1	1	0	0	$3 \times 2 = 6 \Rightarrow Z=N=8$	${}^{16}_8\text{O}$
	0	1	0		
	0	0	1		
2	2	0	0	$6 \times 2 = 12 \Rightarrow Z=N=20$	${}^{40}_{20}\text{Ca}$
	0	2	0		
	0	0	2		
	1	1	0		
	0	1	1		
	1	0	0		

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Первые три магические числа хорошо объясняются оболочечной теорией:

$$2, 8, 20.$$

А следующие не объясняются:

$$28, 50, 82, 126.$$

Если либо Z , либо N равны этим числам, то элемент обладает повышенной энергией, потому что у него получаются полностью заполненные ядерные оболочки. Оболочечная модель объяснила, почему первые три квантовые числа магические.

Задача 7.15. Трехмерный гармонический осциллятор

Простейшей оболочечной моделью ядра является трехмерный гармонический осциллятор. Считая, что потенциальная яма ядра имеет глубину $U_0 = -70$ МэВ, а $U(R_0) = 0$, где R_0 — радиус ядра, оценить энергию связи нуклона для ядра кислорода $^{16}_8\text{O}$.

Решение.

Нарисуем потенциал:

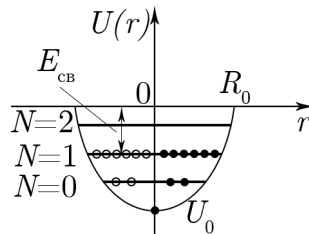


Рис. 12.2

Энергия связи — это необходимая энергия для того, чтобы вытащить (освободить) из ядра один из нуклонов. Взаимодействие между нуклонами — это **сильное взаимодействие**.

Оценим радиус ядра.

$$R = 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt[3]{A} = 1,3 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt[3]{16} = 3,3 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Потенциальная энергия трехмерного гармонического осциллятора:

$$U = U_0 + \frac{M\omega^2 r^2}{2} \text{ при } r \gg R_0,$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}}.$$

Полностью заполнены две оболочки, соответственно, со второго уровня нужно достать нуклон, тем самым совершив работу против сильного взаимодействия.

$N = 0$ и 1 полностью заполненные оболочки.

Тогда для энергии связи получается:

$$\epsilon_{св} = |U_0| - \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega = |U_0| - \frac{5}{2} \hbar \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}} \simeq 12 \text{ МэВ.}$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

1. Правила отбора

Рассмотрим правила отбора и формирование оболочек. Найдем, какой момент импульса уносит излученный γ -квант.

Существует термин — **спин фотона**. Этот термин неправильный, потому что понятие спин применяется только к массовой частице, и оно означает момент собственного вращения в его собственной системе отсчета. Фотон летит со скоростью света, и поэтому неподвижных фотонов не бывает. Не бывает такой системы отсчета, в которой фотон был бы неподвижен. Соответствующий правильный термин — спиральность. Момент импульса излученной частицы (момент собственного вращения) может быть либо по направлению движения, либо против направления движения. Следовательно, фотон будет называться либо **левоспиральным**, либо **правоспиральным**. Момент импульса обозначается буквой j . Это наглядно показано на рисунке (12.3).

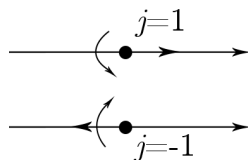


Рис. 12.3

Как известно, **дипольный момент**, меняющейся во времени, излучает. Но в ядре заряды также могут расположиться так, что возникнет квадруполь. В этом случае возникнет **квадрупольный меняющийся момент**, и из-за этого спин может быть равен 2.

Когда ядро излучает, в этом процессе должен выполняться закон сохранения момента импульса, запишем его:

$$J_{нач}^{\rightarrow} = J_{кон}^{\rightarrow} + J_{ф}^{\rightarrow}.$$

На языке квантовых чисел это будет выглядеть следующим образом:

$$|J_{нач} - J_{кон}| \ll j \ll J_{нач} + J_{кон}.$$

Рассмотрим понятие **четность**. Четность связана с зеркальным отображением, то есть переходом с положительных координат к отрицательным. Функции, как известно, бывают четные и нечетные.

При инверсии:

$$x' \rightarrow -x,$$

$$y' \rightarrow -y,$$

$$z' \rightarrow -z,$$

$$\psi(x', y', z') = p \cdot \psi(x, y, z).$$

Еще раз применим операцию четности:

$$p \cdot \psi(x', y', z') = p^2 \cdot \psi(x, y, z) = \psi(x, y, z),$$

$$p^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \pm 1.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Следовательно, четность может быть равна ± 1 .

Определим, **какую четность может иметь фотон**. Фотоны бывают двух типов — **электрический** и **магнитный**. При электрическом излучении фотона происходит за счет изменения орбитального момента. А магнитные фотоны связаны с переворотом магнитного момента, то есть спина.

Для разных фотонов с моментом импульса j имеем:

$(-1)^j$ — электрическое EJ — поле фотона,

$(-1)^{(j+1)}$ — магнитное MJ — поле фотона.

Соответственно, фотоны могут быть E1, M1, E2, M2 и т. д.

$j = 1$ — дипольное излучение,

$j = 2$ — квадрупольное излучение,

$j = 3$ — октупольное излучение.

Случай $j = 0$ (монополю) не может быть реализован, так как электромагнитные волны поперечные, и для них не имеется никакой симметрии.

Напишем в порядке убывания вероятности появления разных фотонов.

E1, E2, M1, E3, M2.

Также должно выполняться соотношение:

$$P_{нач} \cdot P_{кон} = \begin{cases} (-1)^j - E_{фот}, \\ (-1)^{j+1} - M_{фот}. \end{cases}$$

Четность атома или ядра определяется по орбитальному моменту:

$$(-1)^{\sum l_i}.$$

Следовательно, четность полностью заполненных оболочек положительна.

Задача. Желтый дублет натрия

Желтый дублет натрия (Na) состоит из двух переходов:

$$3P_{\frac{3}{2}} \text{ (мультиплетность} = 2) \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$3P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}}.$$

Найдем, какие линии будут видны на опыте, и определим тип этих фотонов.

Решение.

Первый переход:

$$3P_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| \ll j \ll \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right| \Rightarrow 1 \ll j \ll 2.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Следовательно, возможны два перехода:

$$j = 1 \text{ и } j = 2.$$

Проверим четность. Вспомним, чему равен орбитальный момент в разных состояниях:

$$l = 0 \text{ (s – состояние),}$$

$$l = 1 \text{ (p – состояние),}$$

$$l = 2 \text{ (d – состояние),}$$

$$l = 3 \text{ (f – состояние).}$$

В начальном состоянии один p -электрон, поэтому орбитальный момент равен 1.

$$P_{нач} \cdot P_{кон} = \begin{cases} (-1)^j, \\ (-1)^{j+1}, \end{cases}$$

$$P_{нач} \cdot P_{кон} = (-1)^1 \cdot (-1)^0 \Rightarrow -1 = (-1)^j.$$

Следовательно, так как для j возможны только 1 или 2, то $j = 1$. Если фотон электрический, то он принадлежит к типу E1.

Для магнитного фотона:

$$-1 = (-1)^{j+1}.$$

Соответственно, если фотон магнитный, то он принадлежит к типу M2. Таким образом, учитывая то, что вероятность M2 чрезмерно маленькая, из закона сохранения четности волновой функции было получено, что искомый фотон типа E1.

Посмотрим вторую линию

$$3P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3S_{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \ll j \ll \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| \Rightarrow 0 \ll j \ll 1,$$

$$j = 1.$$

Из закона сохранения четности:

$$(-1)^1(-1)^0 = (-1)^j.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Задача 7.58. Незаполненная оболочка ядра

Нуклон из перезаполненной оболочки ядра углерода $^{17}_8\text{O}$, поглощает M1-фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Решение.

Число слева орбитального квантового числа не имеет никакого физического смысла, оно означает, что данное состояние в эксперименте наблюдалось в первый раз.

Нарисуем нейтронные и протонные ямы для $^{16}_8\text{O}$. Это сделано на рисунке (12.4).

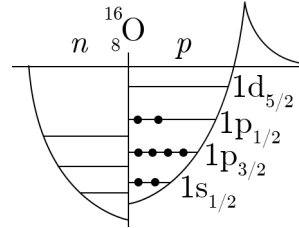


Рис. 12.4

Для протонов существует кулоновский барьер. Каждая из заряженных частиц имеет собственный спин, то есть магнитный момент. У них есть также есть орбитальные моменты. Вспомним из курса электричества, что два параллельных магнитных моментов притягиваются. Следовательно, если орбитальный момент и спин параллельны, то потенциальная яма уширяется, и нуклон опускается ко дну. Наоборот, когда моменты антипараллельны, то самосогласованная яма сужается, а уровень поднимается вверх.

Тогда оказывается, что уровень $P_{\frac{1}{2}}$ выше, чем $P_{\frac{3}{2}}$.

Расщепление уровней показано на рисунке (12.5).

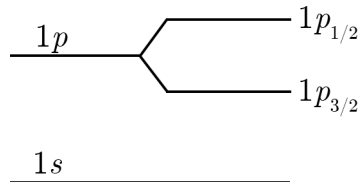


Рис. 12.5

Распишем, как связаны между собой квантовые числа N и l .

$$N \text{ и } l,$$

$$l: N, N-2, \dots, 1 (0),$$

$$N=0 \quad l=0 \quad \rightarrow \quad 1s,$$

$$N=1 \quad l=1 \quad \rightarrow \quad 1p,$$

$$N=2 \quad l=2, 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2s, \\ 1d, \end{cases}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$N = 3 \quad l = 3, 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1f, \\ 2d. \end{cases} .$$

Заполним оболочки. Это проделано на рисунке (12.6).

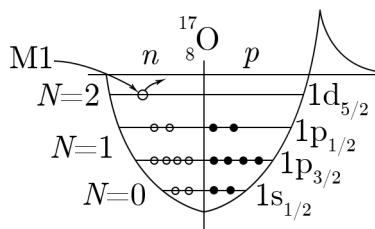


Рис. 12.6

Когда нуклон поглощает $M1$ -фотон, он переходит на некоторый уровень выше. Найдем, куда фотон перейдет, используя все законы сохранения.

Известно, что для $M1$ -фотона $j = 1$.

Запишем правила отбора:

$$|I_{\text{кон}} - I_{\text{нач}}| \ll j \ll I_{\text{кон}} + I_{\text{нач}} .$$

Начальное состояние — $1d_{5/2}$.

$$\Rightarrow \left| I_{\text{кон}} - \frac{5}{2} \right| \ll 1 \ll I_{\text{кон}} + \frac{5}{2} .$$

Закон сохранения четности будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\text{кон}} \cdot P_{\text{нач}} &= (-1)^{j+1}, \\ \Rightarrow (-1)^2 \cdot P_{\text{кон}} &= (-1)^2 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{кон}} = +1, \\ \Rightarrow l^{\text{кон}} &= 2 \quad \text{или} \quad 4. \end{aligned}$$

Нужен минимальный l .

Для $I_{\text{кон}} = \frac{3}{2}$ все соотношения выполняются:

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \right| \ll 1 \ll \frac{3}{2} + \frac{5}{2} .$$

Следовательно, нужный уровень есть $1d_{3/2}$.

Задача 7.64. Ядерный магнитный резонанс

В медицинской томографии внутренних органов используется метод ЯМР на протонах, входящих в состав воды, а для томографии легких — на ядрах газообразного ^3He при его вдыхании. Определить разницу между экспериментальными и теоретическими значениями магнитного момента ядра ^3_2He , если сигнал резонанса наблюдается во внешнем поле $B = 1,5$ Тл на частоте $\nu = 48,75$ МГц. Спин ядра и его магнитный момент вычислять по однонуклонной оболочечной модели.

Решение.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

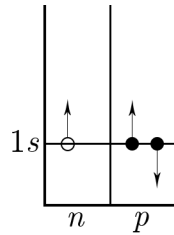


Рис. 12.7

Нарисуем яму для ${}^3_2\text{He}$.

Найдем, чему равен спин такого ядра. Спины протонов взаимоуничтожаются. Следовательно, спин такого ядра $I = \frac{1}{2}$.

Найдем магнитный момент такого ядра:

$$(\mu_{\text{He}})_{\text{теор}} = g_{sn}\mu_{\text{яд}}I,$$

где g_{sn} — спиновый g -фактор нейтрона.

Известно, что $g_{sn} = -3,82$. Так как $I = \frac{1}{2}$, то:

$$(\mu_{\text{He}})_{\text{теор}} = -1,91\mu_{\text{яд}}.$$

Из условия резонанса находим $(\mu_{\text{He}})_{\text{эксп}}$:

$$\hbar\nu_{\text{рез}} = g\mu_{\text{яд}}B \Rightarrow g\mu_{\text{яд}} = \frac{\hbar\nu_{\text{рез}}}{B} \Rightarrow (\mu_{\text{He}})_{\text{эксп}} = g\mu_{\text{яд}}I = \frac{\hbar\nu_{\text{рез}}}{B} = -2,13\mu_{\text{яд}}.$$

Найдем разницу между теоретическим и экспериментальным данными:

$$\Delta\mu_{\text{He}} = |\mu_{\text{эксп}} - \mu_{\text{теор}}| = 0,22\mu_{\text{яд}}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu