
ЛЕКЦИЯ 16

АБСОЛЮТНО ЧЁРНОЕ ТЕЛО. ФОРМУЛА ПЛАНКА

1. Абсолютно черное тело

Абсолютно черное тело — это некий вакуумированный сосуд, стенки которого держатся при какой-то конкретной температуре T . В сосуде есть **фотонный газ**. Газа фотонов не видно, если температура стенок является комнатной. Его не видно, потому что эти фотоны находятся вне оптической области спектра. Но если начнем нагревать эти стенки и дойдем до температур порядка 600 К, появится красное свечение всей внутренности этой полости. Потом оно становится все ярче, и, в конце концов, из отверстия выходит фотонный газ. Датчик фотоприемника регистрирует это излучение. Это уже будет в оптическом диапазоне. То есть эта полость всегда светит.

Абсолютно черное тело представлено на рисунке (16.1).

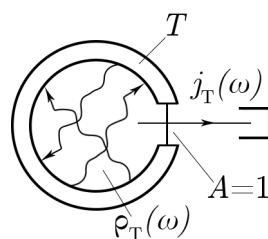


Рис. 16.1

Интересно, почему же это называют абсолютным черным телом. По тем самым причинам, что **коэффициент абсорбции**, то есть коэффициент поглощения, равен единице:

$$A = 1.$$

Следовательно, все, что попадает на абсолютно черное тело, не выходит из него. Даже если начнем светить каким-нибудь светом, все равно все излучение поглотится. Будет излучение стенок соответствующего спектра — спектра абсолютно черного излучения.



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Примером абсолютного черного тела может быть открытое окно в яркий день. Проходя мимо него не получается ничего увидеть, потому что там темно. Коэффициент поглощения лучей, идущих с улицы в эту комнату равен почти единице. Именно поэтому ничего не видно.

Вводится **спектральная плотность излучения**:

$$\rho_T(\omega) \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}} \right].$$

График $\rho_T(\omega)$ от ω показан на рисунке (16.2).

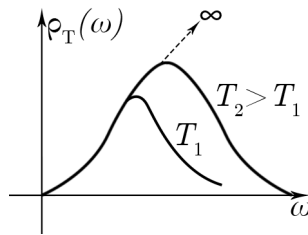


Рис. 16.2

Как видно из графика, при увеличении температуры смещается максимум спектральной плотности.

Объяснить с точки зрения классической физики чрезвычайно сложно. Попытки объяснить это с классической точки зрения приводили к явлению, которая называется **ультрафиолетовая катастрофа**. В теории, построенной Рэлеем плотность уходила на бесконечность при $\omega \rightarrow \infty$.

Ультрафиолетовая катастрофа резко противоречила опыту, а в области малых частот теория Рэля совпадала с опытом достаточно точно.

Макс Планк, в конце концов, принял революционную идею для решения этой задачи. Он предположил, что излучение стенок этой полости происходит квантами, то есть некими порциями электромагнитной энергии, которые записывались следующим образом:

$$h\nu = \hbar\omega,$$

где h и \hbar называются постоянными Планка.

Вводится еще одна величина — **спектральный поток электромагнитной энергии**:

$$j_T(\omega) \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{с}^{-1}} \right].$$

Это есть плотность потока на единицу спектрального интервала.

Найдем площадь под графиками на (16.2):

$$\rho(T) = \int_0^{\infty} \rho_T(\omega) d\omega.$$

Это есть полная, интегральная плотность излучения. Эта плотность указывает на то, сколько энергии в единице объема. Следовательно, ее размерность будет равна

$$\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right].$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Проинтегрируем спектральный поток электромагнитной энергии:

$$j(T) = \int_0^{\infty} j_T(\omega) d\omega \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Экспериментальным путем был обнаружен закон, который впоследствии был назван **законом Стефана – Больцмана**.

$$j(T) = \sigma T^4.$$

σ — мировая константа и равна:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{K}^4}.$$

Потом будет обнаружено, что она является комбинацией других мировых констант — скорости света, постоянной Планка, постоянной Больцмана.

$\rho(T)$ иногда тождественно обозначают как внутреннюю энергию фотонного газа, приходящая на единицу объема, и тем самым эта величина приобретает термодинамический смысл:

$$\rho(T) = U(T).$$

Оказывается, что эти величины — $\rho(T)$ и $j(T)$ — связаны.

Установим их связь. Для этого вспомним формулу для числа ударов идеального газа за секунду на 1 см^2 :

$$z = \frac{n\bar{v}}{4} \left[\frac{\text{удар}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Это статистический результат, который получается интегрированием. Фотонный газ обладает такими же свойствами, как идеальный газ, его частицы тоже ударяются о стенку.

Запишем аналогичную формулу для фотонного газа:

$$j = \frac{\rho c}{4}.$$

Эта формула была получена заменой аналогичных величин, то есть вывода не было дано, но ее можно получить (интегрируя).

Тогда для $\rho(T)$ можно записать:

$$\rho(T) = \frac{4}{c} j(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4.$$

Запишем, чему равна константа a :

$$a = 7,566 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{K}^4}.$$

Представим, что фотонный газ находится в равновесии. Найдем давление фотонного газа на стенку:

$$P = \frac{U}{3}.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Для сравнение запишем, чему равно это давление для идеального газа:

$$P = \frac{2}{3}n \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

Размерности давления и плотности энергии совпадают:

$$P = \frac{U}{3} \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин} \cdot \text{см}}{\text{см}^3} = \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right].$$

Задача 1.23. Комптоновское рассеяние

Абсолютно черное тело подвешено в вакуумной установке так, что через оптическое окно на него падает солнечный свет. Если стенки установки охладить до температуры $T_{\text{ст}1} = 77$ К, то тело будет иметь $T_1 = 275$ К. Найти температуру тела T_2 при $T_{\text{ст}2} = 295$ К. Теплопроводностью остаточных газов и подвески пренебречь.

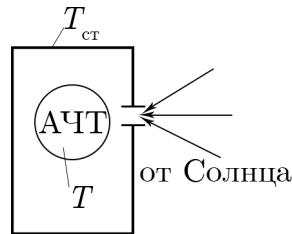


Рис. 16.3



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Решение.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{тело}} \sigma T_{\text{cm1}}^4 + \Phi &= S_{\text{тело}} \sigma T_1^4, \\
 S_{\text{тело}} \sigma T_{\text{cm2}}^4 + \Phi &= S_{\text{тело}} \sigma T_2^4, \\
 T_{\text{cm1}}^4 - T_{\text{cm2}}^4 &= T_1^4 - T_2^4, \\
 \Rightarrow T_2 &= (275^4 + 295^4 - 77^4)^{\frac{1}{4}} = 340 \text{ K}.
 \end{aligned}$$

Задача 1.25. Эффект Комптона

Хорошо теплопроводящий шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r от центра Солнца. Найти температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн км) $R_B = 108$, $R_Z = 150$, $R_M = 228$, $R_{Ю} = 780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C = 6000$ К и радиусом $R_C = 7 \cdot 10^5$ км. Сравнить полученные величины с радиоастрономическими данными: средние температуры освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера оцениваются, соответственно, как $T_B = 735$ К, $T_Z = 275$ К, $T_M = 235$ К и $T_{Ю} = 135$ К. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?

Решение.

С поверхности Солнца этот шар виден под неким телесным углом. Это показано на рисунке (16.4).

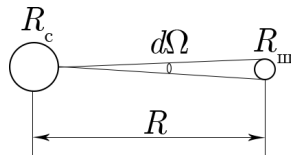


Рис. 16.4

Поскольку задан радиус шара, надо найти угол, под которым из центра Солнца виден диаметр этого шара.

$$d\Omega = \frac{S_{III}}{R^2} = \frac{\pi R_{III}^2}{R^2}.$$

Запишем соответствующие уравнения теплового баланса:

$$\begin{aligned}
 4\pi R_C^2 \sigma T_C^4 \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} &= 4\pi R_{III}^2 \sigma T^4, \\
 \Rightarrow R_C^2 T_C^4 \frac{\pi R_{III}^2}{R^2 4\pi} &= R_{III}^2 T^4, \\
 T &= T_C \sqrt{\frac{R_C}{2R}}.
 \end{aligned}$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Вычислим для разных планет.

$$T_B = 340 \text{ K (735)},$$

$$T_3 = 290 \text{ K (275)},$$

$$T_M = 235 \text{ K (235)},$$

$$T_{Ю} = 130 \text{ K (135)}.$$

В скобках выше записаны реальные значения температур этих планет. Как видно, результаты достаточно близки к реальным значениям, кроме Венеры. Наибольшее расхождение оказалось у Венеры. Это расхождение имеет место из-за того, что с ее поверхности затруднен обмен энергии, потому что на ней есть огромное количество CO_2 , соответственно, на Венере есть очень плотная атмосфера, на поверхность проникнуть не просто, давление на ней огромное, а наличие углекислоты ограничивает теплообмен, и возникает парниковый эффект. В результате температура оказывается смещенный почти вдвое по отношению к той, которая получается теоретически.

2. Формула Планка

Получим формулу Планка.

Еще раз нарисуем график $\rho_T(\omega)$ от ω . Это показано на рисунке (16.5).

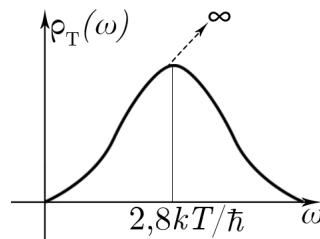


Рис. 16.5

Нужно определить эту функцию.

Рассмотрим пространство волновых чисел. Возьмем конкретные k и приращения dk в этом пространстве. Это пространство волновых чисел показано на рисунке (16.6).

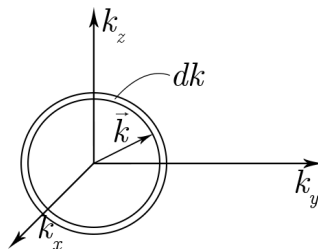


Рис. 16.6

Фотоны бывают двух поляризаций. Вычислим полное число возможных состояний, который может принять фотон при заданном значении волнового числа. На самом деле, можно говорить об импульсах, об импульсном пространстве.



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Число этих состояний в слое от k до dk подсчитывается следующим образом (эта формула дается без вывода):

$$dN = 2 \frac{V dV_k}{(2\pi)^3}.$$

Рассматривается некий резонатор, в котором расположены стоячие волны, причем, столько, сколько их вмещается в данных размерах.

Формула для подсчета полного числа состояний:

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}.$$

Последнее — это число возможных состояний фотона.

$$\rho_T(\omega) d\omega = (\text{число возможных состояний}) \cdot \hbar\omega \cdot f(\omega),$$

где $f(\omega)$ — это вероятность попасть в заданный интервал.

$$V = 1 \text{ см}^3 \Rightarrow \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)}.$$

3. Исследование формулы Планка

Займемся исследованием полученной формулы. Проанализируем это выражение для больших и малых частот. А также проинтегрируем выражение, для того чтобы получить закон Стефана–Больцмана.

1) Низкие частоты:

$$\hbar\omega \ll kT.$$

Это самый крайний случай. Экспонента будет очень мала:

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \approx \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

Получаем закон Рэлея–Джинса:

$$\rho_T(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2.$$

Получается парабола, которая уходит на бесконечность. Это и есть ультрафиолетовая катастрофа.

Среднее значение энергии равно:

$$\bar{\epsilon} = \hbar\omega \cdot \bar{n} = \hbar\omega \frac{kT}{\hbar\omega} = kT \quad \text{— классический результат,}$$

где \bar{n} — средний номер возбужденного состояния.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2) Высокие частоты

$$\hbar\omega \gg kT.$$

Это другой крайний результат, который на графике виден сильно правее точки перегиба.

Получаем **закон Вина**:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Найдем интегральную плотность:

$$U(T) = \rho(T) = \int_0^{\infty} \rho_T(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Сделаем обозначение:

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = x \Rightarrow U(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{k^4 T^4}{\hbar^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

$$U(T) = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15 \hbar^3 c^3} = \frac{4\sigma}{c} T^4,$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

В силу того, что при увеличении частоты на бесконечность функция уходит в ноль, и при стремлении частоты к нулю тоже уходит к нулю, можно примерно такой же график нарисовать для длин волн. Поэтому в некоторых источниках пользуются немного другой характеристикой. Она показана на рисунке (16.7).

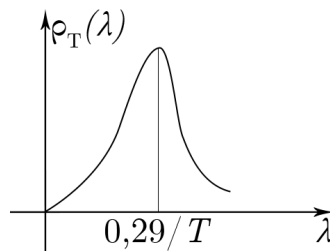


Рис. 16.7



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Задача 1.22. Рассеяние рентгеновских лучей в графите

Спектр излучения космического рентгеновского источника соответствует спектру излучения абсолютно черного тела. Максимум плотности излучения $\rho(\lambda)$ наблюдается на длине волны $\lambda_{\max} = 2 \text{ \AA}$, а суммарная по спектру (интегральная) плотность потока на Земле $j = 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$. Расстояние от Земли до источника $L = 1,3 \cdot 10^4$ световых лет. Оценить диаметр источника.

Решение.

$$\sigma T^4 \cdot 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = j \cdot 4\pi L^2,$$

$$\Rightarrow D = \frac{2L}{T^2} \sqrt{\frac{j}{\sigma}},$$

$$T = \frac{0,29}{\lambda_{\max}} = 1,45 \cdot 10^7 \text{ K},$$

$$L = c\tau = 1,23 \cdot 10^{22} \text{ см},$$

$$\Rightarrow D = 15,5 \text{ км}.$$

Задача 1.38. Рассеяние электрона на фотоне

Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

Решение.

$$j = \sigma T^4.$$

Будем считать, что вся энергия в этой нити излучается.

$$N = \frac{V^2}{R} \propto T^4.$$

Сопротивление нити:

$$R \propto T,$$

$$V^2 \propto rT^4 \propto T^5,$$

$$5 \frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V}.$$

Исследуем используемую область спектра.

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = 2,5 \text{ эВ},$$

$$kT \approx 0,13 \text{ эВ} \ll \hbar\nu.$$

Получается, что это не классическая часть спектра. В задаче рассматривается случай

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

высоких частот.

$$kT \ll \hbar\omega,$$

$$\rho(\omega) \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$\ln \rho \propto \frac{\hbar\omega}{kT},$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{kT^2} \Delta T = \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{\Delta T}{T}.$$

$\Delta\rho$ — это объемная площадь излучения.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta j}{j}.$$

j — это плотность потока.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta j}{j} = \frac{\hbar\omega}{kT} \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V} = 40\%.$$

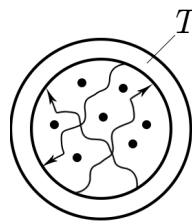
Требуется найти освещенность. Освещенность пропорциональна потоку энергии, которая падает на этот стол.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta E}{E}.$$

4. Индуцированное излучение

Приступаем к индуцированному излучению.

Рассмотрим полость с фотонным газом. Она показана на рисунке (16.8).



газ + излучение

Рис. 16.8

Внутри находятся газ и излучение. Рассмотрим двухуровневую модель. То есть у этого газа возможны только два уровня энергии.

Покажем это на рисунке (16.9).

Рассматривается абсолютно черное тело. Внутри него есть любые фотоны. Какой-то фотон может перейти из нижнего уровня N_1 на верхний N_2 . Он переходит в возбужденное состояние под индуцированным воздействием. Вероятность этого перехода равна P_{12} . Других возможностей оказаться выше нет (только с помощью индуцированного излучения). То есть фотон может перейти наверх после поглощения кванта в этой системе. Для возвращения обратно существует 2 способа. Первый способ — индуцированный переход с излучением фотона. Фотон провоцирует этот переход вниз. Соответствующая



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

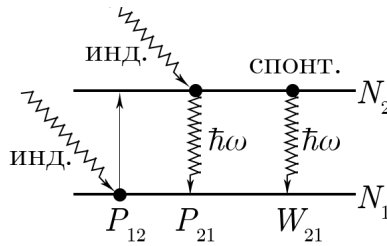


Рис. 16.9

частота — $\hbar\omega$. Переход P_{21} тоже индуцированный. Еще есть спонтанные переходы, тоже с частотой $\hbar\omega$. Вероятность спонтанного перехода будем обозначать как W_{21} .

Объясним, что такое спонтанные переходы. Атом может находиться в своем возбужденном состоянии какое-то ограниченное время в соответствии с **соотношением неопределенностей**. Слишком долго он там находиться не может. То есть он спонтанно переходит на другой уровень без внешнего воздействия.

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega.$$

Условие равновесия:

$$P_{12} = P_{21}.$$

Концентрация газа не меняется, и соответствующие плотности фотонов для таких переходов сверху вниз и снизу вверх одинаковы. То есть в газе ничего не накапливается. Переходы вверх и вниз равновероятны.

Распишем переходы вверх:

$$N_{21} = N_{21}^{und} + N_{21}^{cn} = N_{12},$$

$$N_{21} = P_{21}N_2 + W_{21}N_2 = P_{12}N_1,$$

$$P_{21} = P_{12},$$

$$\Rightarrow P_{21}(N_2 - N_1) = -W_{21}N_2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{N_2}{N_1 - N_2} = \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{1}{\frac{N_1}{N_2} - 1}.$$

Система находится в равновесии. Запишем **соотношение Больцмана**:

$$N_1 = N_2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$1 = \frac{W_{21}}{P_{21}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

$$\frac{P_{21}^{und}}{W_{21}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \bar{n}.$$

Рассмотрим важные **свойства индуцированного излучения**.

Фотон, который вызвал индуцированный переход, возбуждает идентичный с собой фотон. То есть первый и второй фотоны одинаковы. Во-первых, они совпадают по частоте, значит, у них одинаковая энергия. Во-вторых, они совпадают по фазе и по направлению своего движения. Эти два фотона абсолютно когерентны (фотоны индуцированного излучения), следовательно, они могут накапливаться. Эта идея и лежит в основе устройства, которое называется **лазер**.



Задача 1.57. Тепловое равновесие

Система, состоящая из атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии ϵ_1 и $\epsilon_2 > \epsilon_1$, находится в тепловом равновесии. Выразить коэффициент поглощения света $\kappa(T, \omega)$ этой системой на частоте $\omega = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\hbar}$ через его значение κ_0 при $T = 0$. Рассмотреть два предельных случая: 1) $k_B T \gg \hbar\omega$ и 2) $k_B T \ll \hbar\omega$.

Решение.

Рассмотрим эту систему качественно. Здесь обязательно должен быть *резонатор Фабри – Перо* — полупрозрачные зеркала, и внутри некая активная среда. Поймем что в этой активной среде происходит. Выберем в качестве такого объекта лазер на рубине. В такой двухуровневой системе происходит накачка. То есть осуществляется перевод молекул или атомов в возбужденное состояние, на верхний уровень. Происходит это следующим образом. Свет накачивает лазер и переводит атомы в возбужденное состояние. В дальнейшем, когда атомы соответствующих примесей переходят в возбужденное состояние, начинаются индуцированные переходы. Этих переходов очень много. Каждый из этих гамма-квантов уходит в какую-то сторону. Те, который наталкиваются на возбужденный атом, провоцируют такие же переходы, то есть появление таких же гамма-квантов. Таким образом, число таких гамма-квантов увеличивается. То есть, если на пути гамма-кванта встречается возбужденный атом, то сразу провоцируется рождение индуцированного гамма-кванта, и они начинают двигаться между двумя этими зеркалами, возбуждая переходы. Они все когерентны. В результате получается необходимое излучение.

Эта идея показана на рисунке (16.10).

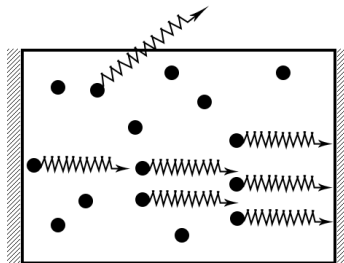


Рис. 16.10

Напомним картинку перехода с излучением. Она показана на рисунке (16.11).

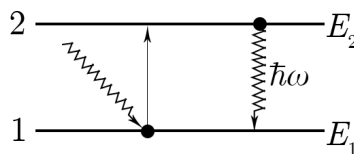


Рис. 16.11

$$j \left[\frac{\text{шт}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right] = \frac{c\rho}{4} \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{c}{4\hbar\omega} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2 \left[\exp\left\{ \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right) \right\} - 1 \right]}.$$

Запишем уравнения баланса:

$$dj_{\text{нога}} = -jdx\sigma_{12}n_1,$$



! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$dj_{\text{изл}} = +jdx\sigma_{21}n_2,$$

где n_1 и n_2 — это концентрации атомов, находящихся на верхнем и нижнем уровнях.

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma, \quad n_0 = n_1 + n_2,$$

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

$$dj = jdx(n_2 - n_1)\sigma,$$

$$k_{\text{ногл}} = \frac{-dj}{jdx} = \sigma(n_2 - n_1) \text{ [см}^{-1}\text{]},$$

$$k_{\text{ногл}} = \sigma n_1 \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right).$$

При $T = 0$ все атомы находятся в основном состоянии (n_0).

$$k_{\text{ногл}} = \sigma n_0 = \sigma(n_1 + n_2) = \sigma \left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right),$$

$$\frac{k_{\text{ногл}}(T)}{k_{\text{ногл}}(0)} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)} = \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT}.$$

Задача 1.59. Рубиновый лазер

Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало со 100%-м отражением, а другое — с коэффициентом пропускания $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $l = 12$ см. Известно, что коэффициент поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $k_n = 0,4 \text{ см}^{-1}$. Найти, какую часть атомов хрома нужно перевести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

Решение.

Переход из n_2 на n_1 . Он показан на рисунке (16.12).

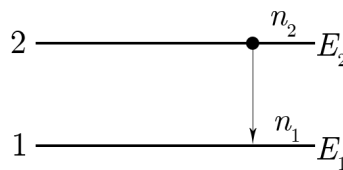


Рис. 16.12

$$n_1 + n_2 = n_0.$$

Доля поглощенных квантов равна

$$\sigma \cdot n_0 \cdot l \text{ см},$$

$$k_n = 0,4 \text{ см}^{-1} = \sigma n_0.$$

Нарисуем резонатор лазера. Он показан на рисунке (16.13).

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

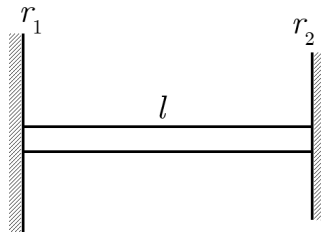


Рис. 16.13

Условие самовозбуждения:

$$\frac{j(2l)}{j(0)} = R_1 R_2 e^{\sigma(n_2 - n_1)2l} \geq 1,$$

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 0,9.$$

Запишем **Закон Бугера**:

$$j(2l) = j_0 e^{\alpha \cdot 2l},$$

$$\sigma(n_2 - n_1)2l = \ln \frac{1}{R_1 R_2}, \quad \sigma = \frac{k_n}{n_0},$$

$$\frac{n_2 - n_1}{n_0} = \frac{1}{2lk_{II}} \ln \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{96} \approx 0,011,$$

$$n_1 + n_2 = n_0, \quad n_2 - n_1 = 0,01n_0, \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_0} = 0,505.$$