

---

---

## ЛЕКЦИЯ 14

---

# ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖЕНИЕ НОСИТЕЛЕЙ. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

### 1. Электроны в магнитном поле. Предельные случаи

#### 1.1. Классическая точка зрения

Приравниваем центробежную силу силе Лоренца:

$$m\omega_c^2 r = \frac{e}{c} v B,$$

где  $v = \omega_c r$ .

Отсюда получаем формулу для свободного электрона.

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

В твердом теле необходимо заменить массы:  $m \rightarrow m^*$ .

Причем эта эффективная масса (циклотронная) будет иметь довольно сложную зависимость:

$$m^* = f(\theta, \phi, m_x^*, m_y^*, m_z^*).$$

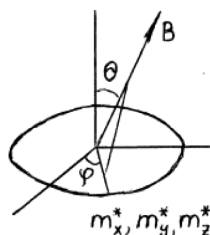


Рис. 14.1



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

Движение по окружности замкнутое, поэтому энергия будет квантоваться.

Поскольку в реальном твердом теле есть несовершенства, на которых рассеивается электрон, и есть характерное время релаксации импульса, то есть две характерных величины времени:  $\tau$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ .

Есть классификация по величине поля. Классически слабое поле:  $\omega_c \tau \ll 1$ ,  $\tau \ll T$ .

Пока поле прокрутит электрон один раз, он очень много раз столкнется, то есть влияние поля будет слабым.

Возьмем  $B = 0$ . Тогда электропроводность:

$$\sigma = \frac{e^2 n T}{m^*}.$$

А если  $B \neq 0$ , то электропроводность уже будет иметь тензорный вид, и одна его компонента:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}.$$

Другой предел — классически сильное поле  $\omega_c \tau \gg 1$ .

Но на самом деле рассматривать нужно с квантовой точки зрения.

## 1.2. Квантующие поля

Нужно сравнивать:  $\hbar\omega \gg \kappa T$ .

Для поля:  $B = 10 \text{ Тс} = 10^5 \text{ Гс}$ .

Равенство наступает при температуре порядка 15К, поэтому эксперименты проводятся при низких температурах.

Посмотрим, что происходит со спектром. Импульс квантуется, но  $\Delta k \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ . Можно говорить о квазинепрерывном импульсе.

Если  $B = 0$ , то  $k_x, k_y, k_z$ ,

$$E = \frac{\hbar}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Если же  $B \neq 0$  ( $\vec{B} \parallel z$ ),  $k_z, n$  — числа, задающие энергию.

$$E = E_{\parallel} + E_{\perp},$$

$E_{\parallel} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$  — не квантуется.

$E_{\perp} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2)$  — квантуется.

Получатся какие-то уровни энергии. Но между этими уровнями могут существовать переходы.

Если мы учитываем столкновения, то энергия будет размываться:

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau},$$

Размытие нужно сравнивать с характерной энергией:  $\Delta E \ll \hbar\omega_c$ .

Энергия двумерного движения, как показал Ландау, квантуется как одномерный осциллятор.

$$E_{\perp} \rightarrow \hbar\omega_c \left( N + \frac{1}{2} \right), \text{ где } N \geq 0.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

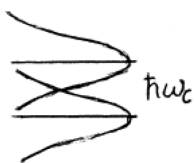


Рис. 14.2

Соотношение  $\vec{p} = m^* \vec{v}$  уже не справедливо, т. к. нужно учитывать импульс поля.

При переходе из одной области, где поле равно нулю, в другую, где не равно, получается:

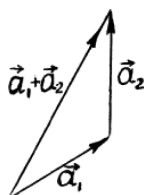


Рис. 14.3

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}.$$

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Можно показать, что:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{p} + q \frac{\vec{A}}{c} \right) = 0,$$

т. е. эта величина сохраняется.

Поскольку  $q = -e$ , то  $\vec{p} - \frac{|q|}{c} \vec{A} = m\vec{v}$  — обобщенный импульс.

Вопрос выбора  $\vec{A}$ .

$\vec{B} \equiv \vec{B}_0 \parallel z$ .

Поскольку  $B = \text{rot } \vec{A}$ , то:

$$\begin{cases} \vec{A} = (0, B_0 x, 0) \text{ калибровка Ландау} \\ \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}_0, \vec{r}]. \end{cases}$$

Рассмотрим энергетические уровни. Слева — без поля, справа — при наличии поля. До включения поля, уровни были квазинепрерывные, но затем они перешли в квантованные.

Посчитаем кратность вырождения образовавшихся уровней.

$$E_{\perp} = \frac{\hbar^2}{2m^*} k_{\perp}^2.$$

Плотность состояний:

$$dN^{(2)} = 2 \frac{S}{(2\pi)^2} d^2 k_{\perp} = S g^{II}(E) dE,$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

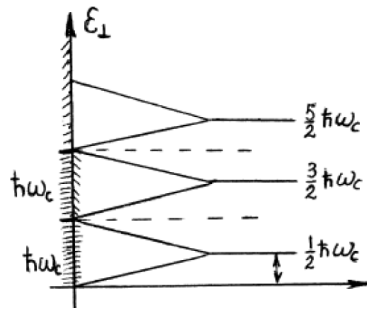


Рис. 14.4

$$dN = 2S \frac{2\pi k_{\perp} dk_{\perp}}{(2\pi)} = S \frac{dk_{\perp}^2}{2\pi} = \frac{S2m}{\hbar^2 2\pi} dE_{\perp},$$

$$g^{II} = \frac{m}{\pi \hbar^2}.$$

Количество уровней, приходящихся на интервал энергии  $\hbar\omega$ :

$$k = \hbar\omega_c S g^{II}(E),$$

$$k = \frac{\hbar e B}{m^* c} * S \frac{m^*}{\pi \hbar^2} = \frac{e}{\pi \hbar c} B S = 2 \frac{e}{\hbar c} \Phi = 2 \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

где  $\Phi_0 \equiv \frac{\hbar c}{e} \cong 4 * 10^{-7} \text{ Гс} * \text{см}^2$  — квант магнитного потока. Грубо говоря, это количество силовых линий, захваченных орбитой одного электрона.

Численно, получается, что кратность вырождения уровня порядка двух миллионов. Теперь учтем спин:

$$E = \frac{\hbar k_z^2}{2m^*} + \hbar\omega(N) \frac{1}{2} + g_S \mu_B B m_S, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0 c}.$$

Тогда каждый из уровней расщепится еще на два. Поскольку:

$$\hbar\omega_c = \frac{eB\hbar}{m_0 c},$$

$$g_S \mu_B B \Delta m_S = 2 * \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{2m_0 c},$$

то расщепление по спину будет выглядеть следующим образом.

В твердом теле расщепление будет более сложное, поскольку необходимо сравнивать между собой значения:  $m^*$  и  $g_s m_0$ .

Если эффективная масса меньше, то расщепление слабое, рисунок слева.

Если наоборот, то расщепление — сильное, рисунок справа.

При учете спина, емкость подуровня Ландау будет  $k = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ .

Наиболее выгодное энергетическое состояние — когда спин против направления магнитного поля.

Посмотрим, что будет, если мы будем менять поле.

$$E_{\perp}^{cl} = \frac{m\omega_c^2 r_{\perp}^2}{2} — \text{с точки зрения классики.}$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

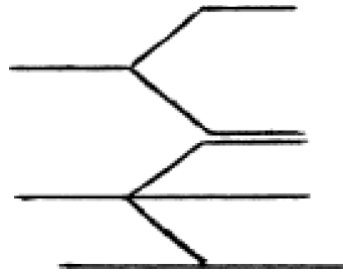


Рис. 14.5

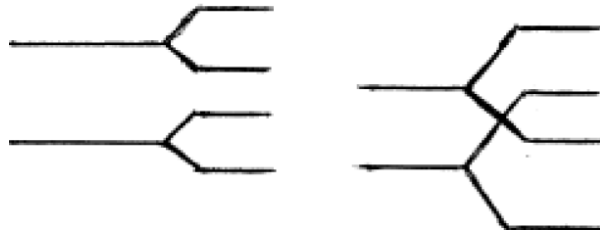


Рис. 14.6

$E_{пер} = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$ . Из этих двух выражений — чем больше поле, тем меньше радиус кружка, тем больше этих кружков можно расположить на площади образца.

Теперь нужно понять, какое у нас количество электронов. Для МОП структуры плотность заряда можно изменять.

Нужно сравнить  $k$  и  $N_e \cdot \frac{BS}{\Phi_0}$  и  $N_e, n_s$  и  $\frac{B}{\Phi_0}$ . Если поле достаточно большое, то все электроны будут сидеть на нижнем уровне. Затем (при уменьшении поля) они будут перескакивать наверх.

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

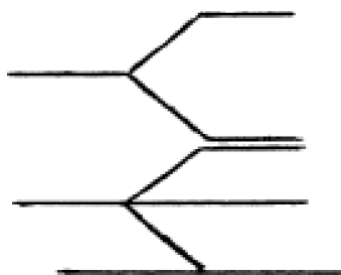


Рис. 14.7

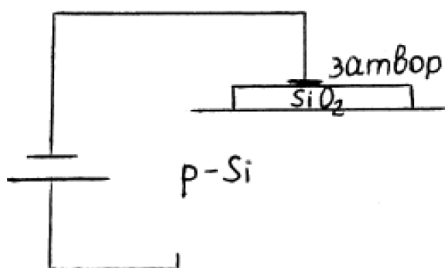


Рис. 14.8

## 2. Эффект Холла

Если в проводнике есть и электроны и дырки.

$$j = j_e + j_h = \underbrace{|e|(n\mu + p\mu_p)}_{\sigma_0} E$$

— закон Ома.

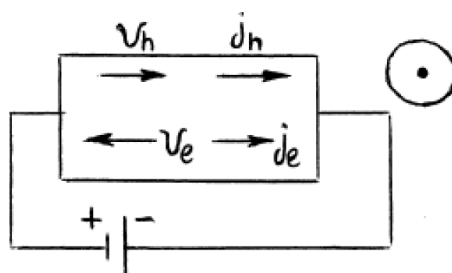


Рис. 14.9

7

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

$$F = \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}] = -[j, \vec{B}]$$

— сила Лоренца. Отклоняться и электроны и дырки будут в одну сторону.

Заряды перераспределятся и возникнет электрический ток в направлениях  $x$  и  $y$ :

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y,$$

$$j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y,$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{zz} \equiv \sigma_0,$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2},$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\sigma_0 \frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2},$$

$$\sigma_0 \frac{\omega_0\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y.$$

Есть два условия. Первое — холостой ход (если цепь разомкнута)

$$E_y = -\frac{\sigma_{yx}}{\sigma_{yy}}E_x = -\omega_c\tau E_x.$$

Второе — короткое замыкание.

$$R = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{1}{enc}$$

— константа Холла.

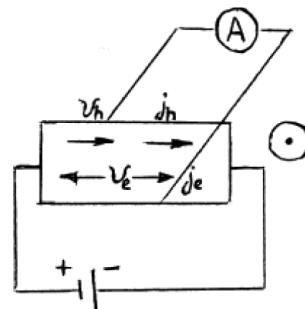


Рис. 14.10

Поскольку измерять лучше сопротивление, а не проводимость, то нужно переписать закон Ома:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k,$$

$$E_i = \rho_{ik}j_k.$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

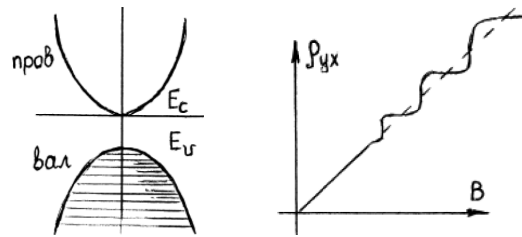


Рис. 14.11

Если мы найдем поперечное сопротивление:  $\rho_{yx} = RB = \frac{B}{e n_s}$  и если отложим зависимость удельного сопротивления от поля, получим просто прямую.

Но это неверно. В 1980 году выяснили экспериментальную зависимость. Оказалось, что удельное сопротивление квантуется.

$$R_B = \rho = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n}.$$

Величина  $\frac{h}{e^2}$  — квант сопротивления.

С помощью измерения сопротивления, можно получить с большой точностью постоянную Планка.

А такая зависимость будет для  $\rho_{xx}$ :

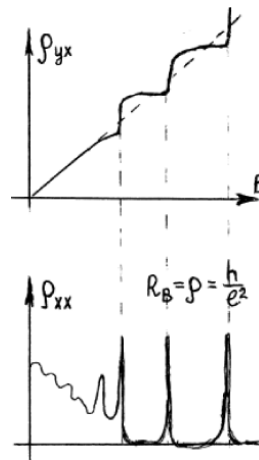


Рис. 14.12

Пусть все электроны на нижнем уровне, причем там нет свободных мест. А при низких температурах не перепрыгнуть на более высокий уровень. Тогда нет носителей тока. Получили объяснение наличия ступеньки.

$$R = \frac{V_B}{J} = \frac{\rho_{yx}}{d} = \frac{B}{e c n_s},$$

где  $d$  — толщина слоя электронов.

Условие квантования:  $n_s = \frac{B}{\Phi_0} n$ , где  $n$  — число заполненных подуровней.

Тогда получим:

$$R = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n}.$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

Этот эффект называется целочисленный квантовый эффект Холла (ЦХЭК).  
Затем был открыт дробный квантовый эффект Холла (ДХЭК).

### 3. Сверхпроводимость

Открытие СП произошло в 1911 году Каммерлинг-Оннесом. Была обнаружена сверхпроводимость в ртути при температуре жидкого гелия.

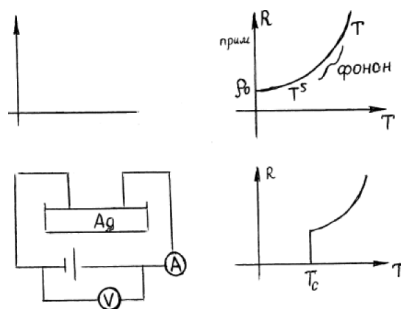


Рис. 14.13

Зависимость, которая должна была получиться — сверху, а получившаяся в результате эксперимента — снизу. Оказался провал до нуля.

Правда, на самом деле  $T_c(\text{Hg}) = 4,18\text{K}$ ,  $T_{kip}(\text{He } 760\text{мм}) = 4,2\text{K}$ , то есть Камерлинг-Оннес не мог открыть сверхпроводимость. Но в результате того, что насос откачивал пары жидкого гелия, его температура понизилась, и стало возможным обнаружить явление

$$T > T_c, \quad T < T_c.$$

Вначале считали, что получили идеальный металл.

Возьмем температуру  $T < T_c$ , тогда если поместим его в магнитное поле, то оно обходит стороной проводник.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

— уравнение Максвелла,  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ .

Но если у нас идеальный проводник, то  $\rho = 0$ , и поле  $\vec{B}$  не должно меняться, то есть если поля не было вначале, то его не будет и при воздействии.

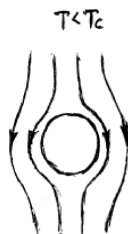


Рис. 14.14

Теперь рассмотрим  $T > T_c$ . В этом случае поле заберется внутрь проводника. А если затем мы опустим температуру ниже критической, то проводник захватит поле.

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.  
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

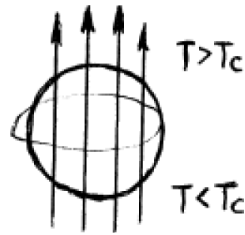


Рис. 14.15

Так думали 20 лет, пока не был открыт эффект Мейснера. Оказалось, что поле в любом случае выталкивается из проводника при наличии сверхпроводимости, то есть предположение об идеальном металле — неверное.

Затем были поставлены опыты при увеличении значения поля. Оказалось, что существует критическое магнитное поле, которое разрушает сверхпроводимость и попадает внутрь поля. Существует критическое поле:  $H < H_{cr}(T)$  — СП,  $H > H_{cr}(T)$  — обычный металл.

Оказалось, что зависимость критического поля от температуры для всех сверхпроводников примерно одинаковая.

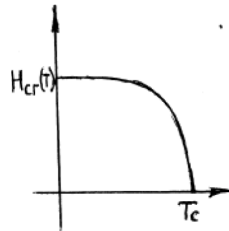


Рис. 14.16



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)