ЛЕКЦИЯ 3

ВИХРЕВЫЕ ТЕОРЕМЫ

Вспомним основные свойства и термины, которые будут использованы в вихревых теоремах:

1. **Циркуляция векторного поля** — криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру.
$$\Gamma = \oint\limits_L \vec{u}\, d\vec{l}.$$

2. **Теорема Стокса**

   Циркуляция скорости по жидкому контуру равна потоку ротора скорости через поверхность, ограниченную данным контуром.
$$\begin{cases} \Gamma = \oint\limits_L \vec{u}\, d\vec{l} = \oint\limits_L u\, dx + v\, dy + w\, dz, \\ \Gamma = \iint\limits_S \vec{\Omega}_n\, ds, \end{cases}$$
   где $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{u}$.

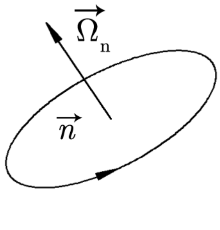

Рис. 3.1

3. **Вихревая линия** — линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с $\operatorname{rot}(\vec{u})$. Дифференциальное уравнение вихревой линии:
$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

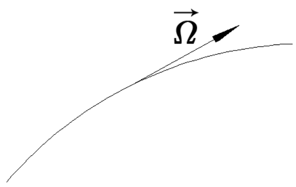

Рис. 3.2

4. Вихревая трубка

Если из замкнутого контура, не совпадающего с вихревой линией, выпустить вихревые линии, то полученная фигура будет называться вихревой трубкой.

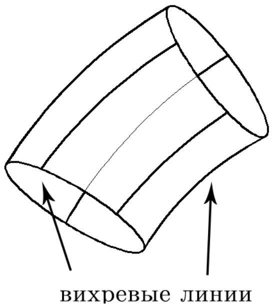

Рис. 3.3

5. Интенсивность вихревой трубки — поток ротора скорости внутри трубки через поперечное сечение.

$$\mathcal{J} = \iint\limits_S \vec{\Omega}_n\, ds = \oint\limits_L \vec{u}\, d\vec{l}.$$

Покажем, что циркуляция по любому контуру, опоясывающему вихревую трубку, одинакова.

Док-во: Возьмем вихревую трубу и ограничим ее двумя контурами S_1 и S_2.

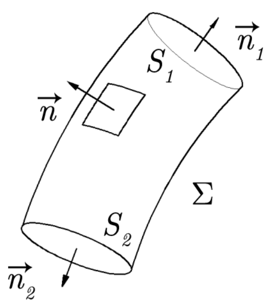

Рис. 3.4

Т. к. $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, то:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\vec{\Omega} = 0 \quad\Rightarrow\quad \oiint \Omega_n\, ds = 0.$$

Сечения вихревой трубки могут быть любыми. Через боковую поверхность поток равен нулю, т. к. из определения следует, что нормальная компонента ротора скорости на боковой поверхности вихревой трубки равна нулю. Поэтому поток может быть только через поперечное сечение.

$$\iint\limits_{S1} \Omega_{n1}\, ds + \iint\limits_{S2} \Omega_{n2}\, ds + \underbrace{\iint\limits_{\Sigma} \Omega_{n}\, ds}_{0} = 0.$$

Обход контура заранее фиксирован и связан с направлением внешней нормали. В сечениях внешние нормали n_1 и n_2 направлены в разные стороны. Значит, обход по контурам будет осуществляться тоже в разные стороны.

$$\oint\limits_{L1} \vec{u}\, d\vec{l} - \oint\limits_{L2} \vec{u}\, d\vec{l} = 0.$$

Это и означает, что циркуляция по любому контуру, опоясывающему вихревую трубку, одинакова.

Понятие интенсивности не зависит от места, где проведен контур. Это общее свойство трубки.

1. Теорема Томпсона

Замечание Впервые эту теорему доказал Гельмгольц в 1858 г. очень сложным способом. Томпсон нашел более изящное доказательство, поэтому теорема и была названа в его честь. *

Для начала решим некоторую вспомогательную задачу. Будем использовать лагранжев подход.

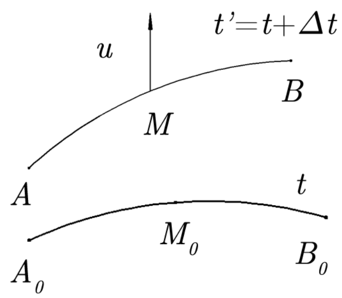

Рис. 3.5

Пусть в начальный момент времени имеется некоторая дуга A_0B_0, состоящая из жидких частиц. Дуга перемещается и деформируется вместе с частицами. Выберем произвольную точку M_0. В некоторый момент времени дуга A_0B_0 перейдет в дугу AB. Тогда точка M_0 перейдет в точку M.

Обозначим расстояние от точки A_0 до рассматриваемой точки M через σ. С помощью σ будем описывать все точки дуги. Тогда σ принимает значения от 0 до l, где l — длина дуги A_0B_0.

В момент t_0:

$$\begin{cases} x = x(\sigma), \\ y = y(\sigma), \\ z = z(\sigma). \end{cases}$$

Со временем все частицы дуги меняют свое положение, но, т. к. будет использоваться лагранжев подход, для каждой точки значение σ будет оставаться одинаковым. σ — лагранжева координата.

В момент t':

$$\begin{cases} x = x(\sigma, t), \\ y = y(\sigma, t), \\ z = z(\sigma, t). \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = \vec{r}(\sigma, t).$$

Тогда скорость частицы равна производной по времени вектора $\vec{r}$ при постоянной σ. Вычислим криволинейный интеграл по дуге A_0B_0.

$$t : \mathcal{J} = \int\limits_{A_0B_0} \vec{u}\, d\vec{l},$$

$$t' = t + \Delta t : \mathcal{J}' = \int\limits_{AB} \vec{u}\, d\vec{l}.$$

Поделим на Δt и устремим значение Δt к нулю.

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{J}' - \mathcal{J}}{\Delta t}.$$

Перейдем под знаком интеграла от переменных $x\,, y\,, z$ к переменной σ.

$$\mathcal{J} = \int\limits_{AB} u\, dx + v\, dy + w\, dz = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \left(u\frac{\partial x}{\partial \sigma} + v\frac{\partial y}{\partial \sigma} + w\frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \vec{u}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} d\sigma,$$

где $\mathcal{L}$ — начальная длина дуги A_0B_0.

Значения $\vec{u}$ и $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ меняются со временем, но значение $\mathcal{L} = \text{const}$.

Тогда в любой момент времени справедливо:

$$\mathcal{J} = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \vec{u}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Возьмем производную от этой функции как производную по времени от подынтегрального выражения.

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} d\sigma + \int\limits_0^{\mathcal{L}} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t\, \partial \sigma} d\sigma,$$

где $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{a}$ — ускорение частицы; $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{u}$ — скорость частицы.

Тогда для скорости изменения интенсивности получим:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \int\limits_0^{\mathcal{L}} \vec{a}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} d\sigma + \int\limits_0^{\mathcal{L}} \vec{u}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial \sigma} d\sigma = \int_{AB} \vec{a}\,d\vec{l} + \frac{\vec{u}^{\,2}\big|^B}{2\big|_A}.$$

При вычислении первого интеграла вернулись к прежним переменным и пределам интегрирования. Окончательно получим:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \oint \vec{a}\,d\vec{l}.$$

Если точки A и B совпадают, то контур замкнутый, и для замкнутого контура выполняется:

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{u}\,d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{u}}{dt} d\vec{l}.$$

Тем самым была доказана следующая теорема:

Теорема 1 Производная от циркуляции скорости по жидкому замкнутому контуру равна циркуляции ускорения по этому контуру. *

Теперь докажем теорему Томпсона о циркуляции.

Теорема 2 (Теорема Томпсона) Если массовые силы потенциальны, а жидкость баротропная, то циркуляция скорости по любому жидкому замкнутому контуру во времени движения остается неизменной. *

Док-во: Рассмотрим идеальную жидкость. Для нее справедливо:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{F}.$$

Наложим некоторые ограничения на правую часть уравнения:

1. **Потенциальность массовых сил**

$$\vec{F} = -\nabla \nu.$$

2. **Баротропность**

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Функция $\mathcal{P}$ зависит от верхнего предела p.

Тогда:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla(\mathcal{P} + \nu).$$

Используя теорему, доказанную выше, получим:

$$\oint \frac{d\vec{u}}{dt} d\vec{l} = -\oint \nabla(\mathcal{P} + \nu)\, d\vec{l} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{u}\, d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{u}}{dt} d\vec{l},$$

$$\oint \vec{u}\, d\vec{l} = \text{const}.$$

Таким образом, было доказано, что циркуляция по жидкому контуру сохраняется.

Следствия (Теорема Лагранжа): Если жидкость идеальная, баротропная, и массовые силы допускают потенциал, тогда, если в некоторой части при $t = 0$ завихренность отсутствует, то в этой части жидкости завихренность будет отсутствовать и далее. ■

Рассмотрим некоторый жидкий объем и выделим в нем меньший объем, в котором $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$ (см. рис. 3.6). Если $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$, то для любого контура в этом объеме циркуляция равна нулю. Выберем три взаимно перпендикулярных контура. Т. к. циркуляция равна нулю, то и нормальная компонента $\operatorname{rot}\vec{u}$ к этим плоскостям тоже равна нулю.

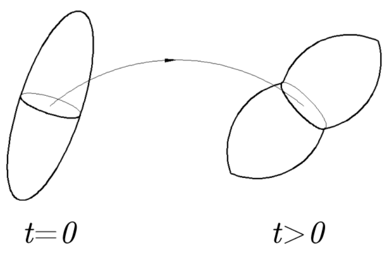

Рис. 3.6

В следующий момент времени этот объем передвинется, и прежние контуры перейдут в другие. Но циркуляция и нормальные компоненты $\operatorname{rot}\vec{u}$ останутся равными нулю. Т. к. все контуры различны, то для любой точки в этом объеме $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. Поэтому, если в некотором объеме ротор скорости был равен нулю, то в этом объеме ротор скорости будет равен нулю в любой последующий момент времени, а значит, если движение потенциально при $t = 0$, то оно было потенциальным и будет потенциальным.

2. Теорема Гельмгольца

Теорема 3 (Теорема Гельмгольца) Если сделать предположения теоремы Лагранжа, то частицы жидкости, образующие вихревую линию при $t = 0$, далее также образуют вихревую линию. Вихревая линия перемещается вместе с образующими ее частицами.∗

Доказательство будем проводить в 2 этапа.

Док-во: 1. Сохранение вихревой поверхности

Вихревая поверхность — это поверхность, у которой нет нормальной компоненты ротора скорости. Т. е. $\operatorname{rot}\vec{u}$ всегда направлен по касательной к этой поверхности.

В начальный момент времени циркуляция по контуру равна нулю.

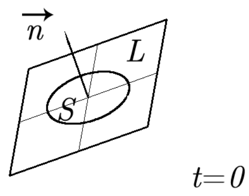

Рис. 3.7

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{u}, \quad \vec{\Omega} \perp \vec{n}, \quad \Omega_n = 0,$$
$$\oint\limits_L \vec{u}\,d\vec{l} = \iint\limits_S \Omega_n\,ds = 0.$$

В момент времени $t > 0$ поверхность имеет новую нормаль и новый контур.

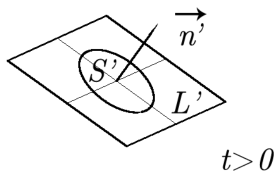

Рис. 3.8

Но циркуляция сохраняется:

$$\oint\limits_L \vec{u}\,d\vec{l} = \oint\limits_{L'} \vec{u}\,d\vec{l} = \iint\limits_S \Omega_{n'}\,ds = 0.$$

Так как контур можно выбрать произвольным, то единственный возможный случай, когда циркуляция равна нулю:

$$\Omega_{n'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} \perp \vec{n}'$$

Таким образом, получим, что ротор скорости перпендикулярен поверхности, и вихревая поверхность сохраняется. Вихревая поверхность движется вместе с образующими ее частицами.

Сохранение вихревой линии

Зададим уравнение линии как пересечение двух вихревых плоскостей.

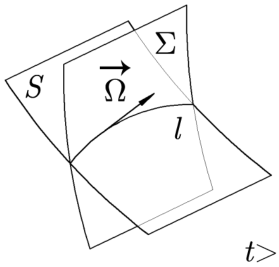

Рис. 3.9

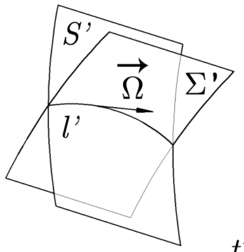

Рис. 3.10

$\sum$ и S —вихревые поверхности при $t = 0$. $\sum'$ и S' —вихревые поверхности при $t > 0$. Тогда, линия пересечения вихривых линий является вихревой линией. В момент времени $t > 0$, поверхность переместится, но вихревая линия будет состоять из тех же частиц, что и при $t = 0$. Таким образом, было доказано, что вихревые линии сохраняются.

2. Следствия: Вихревая трубка во время движения остается вихревой трубкой. ■

Теорема 4 (Теорема Гельмгольца о сохранении интенсивности вихревых трубок) В предположении теоремы Лагранжа интенсивность любой вихревой трубки сохраняется во времени.

$$\mathit{\Gamma} = \oint\limits_{L} \vec{u}\,d\vec{l} = \oint\limits_{L'} \vec{u}'\,d\vec{l}'.$$

Сохранение интенсивности вихревых трубок является следствием того, что сохраняется циркуляция по контуру. Т. к. циркуляция сохраняется во времени, то и интенсивность вихревых трубок будет постоянной.

3. Теорема Фридмана

Введем понятие векторной линии. Пусть задано произвольное векторное поле:

$$\vec{a} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z).$$

Векторная линия — линия, касательная к которой совпадает с направлением $\operatorname{rot} \vec{a}$.

$$d\vec{r} \parallel \vec{a} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} \times \vec{a} = 0.$$

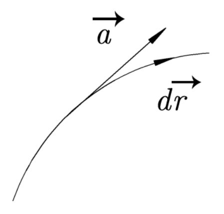

Рис. 3.11

Дифференциальное уравнение векторной линии имеет вид:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Частный случай векторной линии — линия тока, где $\vec{a}$ — вектор скорости.

Рассмотрим произвольное векторное поле. Пусть при $t = t_0$ частицы образуют векторную линию. Возникает вопрос, будут ли эти же частицы составлять векторную линию при $t > t_0$ и сохранится ли векторная линия.

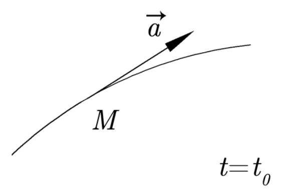

Рис. 3.12

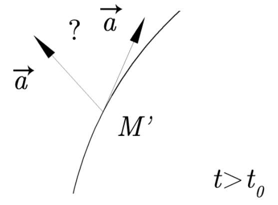

Рис. 3.13

Пусть векторные линии сохраняются, тогда сохраняются векторные трубки.

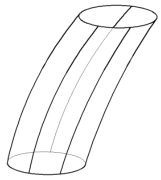

Рис. 3.14

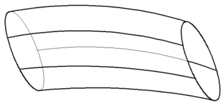

Рис. 3.15

Рассмотрим, сохраняются ли интенсивности векторной трубки.

$$\mathcal{J} = \iint\limits_S a_n\, ds.$$

Потребуем чтобы $\vec{u}$ и $\vec{a}$ были непрерывны вместе с первыми производными. Тогда при $\vec{a} \neq 0$ через каждую точку проходит только одна векторная линия.

Теорема 5 (Теорема Фридмана) Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы сохранялись как векторные линии векторного поля $\vec{a}$, так и интенсивности векторных трубок, состоит в выполнении равенства:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\nabla)\vec{u} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

во всей области для любого момента времени. $*$

Докажем теорему в три этапа.

Док-во: **1. Необходимое условие для сохранения векторных линий $\vec{a}$ состоит в выполнении равенства:**

$$\left[\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u}\right] \times \vec{a} = 0.$$

Рассмотрим два близких момента времени. Пусть $\overrightarrow{MM_1}$ — вектор вдоль вихревой линии, $\vec{a}$ — касательный вектор к $\overrightarrow{MM_1}$. Тогда, в момент времени $t+\Delta t$ вектор $\overrightarrow{MM_1}$ перейдет в вектор $\overrightarrow{M'M_1'}$.

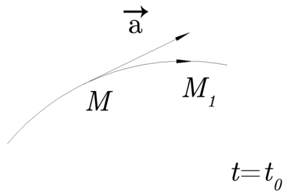

Рис. 3.16

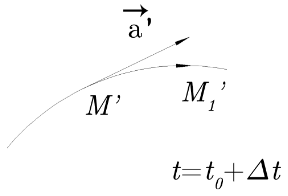

Рис. 3.17

$$\delta\vec{r} = \overrightarrow{MM_1}, \quad \delta\vec{r} + d\delta\vec{r} = \overrightarrow{M'M_1'}$$

$$t: \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{r}\times\vec{a} = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\vec{r} = \epsilon\vec{a},$$

$$t+\Delta t: \quad \Rightarrow \quad (\delta\vec{r} + d\delta\vec{r})\times(\vec{a} + d\vec{a}) = 0,$$

$$\underbrace{\delta\vec{r}\times\vec{a}}_{0} + \delta\vec{r}\times d\vec{a} + d\delta\vec{r}\times\vec{a} + d\delta\vec{r}\times d\vec{a} = 0,$$

$$d\delta\vec{r}\times\vec{a} - \delta\vec{a}\times\delta\vec{a} = 0.$$

Поделим полученное выражение на Δt и устремим Δt к нулю. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{r}\times\vec{a} - \frac{d\vec{a}}{dt}\times\delta\vec{r} = 0.$$

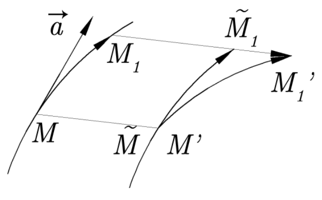

Рис. 3.18

$\overrightarrow{\tilde{M}\tilde{M}_1}$ получен параллельным переносом $\overrightarrow{MM_1}$.

$$\overrightarrow{\tilde{M}M_1'} = d\delta\vec{r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \delta\vec{u}.$$

Или в виде системы:

$$\begin{cases} (\delta\vec{u})_x = \delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\delta z, \\ (\delta\vec{u})_y = \delta v = \dfrac{\partial v}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial v}{\partial z}\delta z, \\ (\delta\vec{u})_z = \delta w = \dfrac{\partial w}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial w}{\partial z}\delta z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\delta\vec{u})_x = \delta u = (\delta\vec{r}\,\nabla)u \\ (\delta\vec{u})_y = \delta v = (\delta\vec{r}\,\nabla)v \\ (\delta\vec{u})_z = \delta w = (\delta\vec{r}\,\nabla)w. \end{cases}$$

В векторном виде:

$$\delta\vec{u} = (\delta\vec{r}\,\nabla)\vec{u}.$$

Т. к. $\delta\vec{r} = \epsilon\vec{a}$, то $\delta\vec{u} = \epsilon(\vec{a}\,\nabla)\vec{u}$. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \epsilon(\vec{a}\,\nabla)\vec{u}.$$

С учетом доказанного соотношения, окончательно получим:

$$\epsilon(\vec{a}\,\nabla)\vec{u}\times\vec{a} - \frac{d\vec{a}}{dt}\times\epsilon\vec{a} = 0, \quad \Rightarrow \quad \epsilon\left[\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u}\right]\times\vec{a} = 0.$$

Получим необходимое условие сохранения векторных линий:

$$\left[\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u}\right]\times\vec{a} = 0.$$

Необходимое условие для сохранения интенсивности векторных трубок состоит в выполнении равенства:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0.$$

При этом векторные линии сохраняются автоматически.

Рассмотрим некоторые дополнительные свойства.

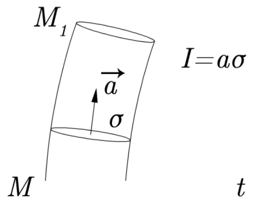

Рис. 3.19

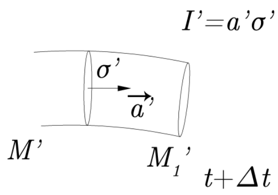

Рис. 3.20

$$I = a\sigma, \quad I' = a'\sigma',$$

где σ — площадь поперечного сечения.

Если интенсивность сохраняется, то выполняется равенство:

$$a\sigma = a'\sigma'.$$

Т. к. векторные трубки сохраняются, то выполняется закон сохранения массы:

$$m = \rho\sigma|\delta\vec{r}\,|, \quad m' = \rho'\sigma'|\delta\vec{r} + d\delta\vec{r}\,|.$$

Откуда получим, что:

$$\rho\sigma|\delta\vec{r}\,| = \rho'\sigma'|\delta\vec{r} + d\delta\vec{r}\,|.$$

Поделим второе равенство на первое и избавимся от σ.

$$\rho\frac{|\delta\vec{r}\,|}{a} = \rho'\frac{|\delta\vec{r} + d\delta\vec{r}\,|}{a'}.$$

Введем величину $\vec{A} = \dfrac{\vec{a}}{\rho}$.

Тогда получим:

$$\frac{|\delta\vec{r}\,|}{A} = \frac{|\delta\vec{r} + d\delta\vec{r}\,|}{A'} = \eta.$$

Т. к. $\vec{A} \parallel \delta\vec{r} \parallel \vec{a}$, то:

$$\begin{cases} \delta\vec{r} = \eta\vec{A}, \\ \delta\vec{r} + d\delta\vec{r} = \eta(\vec{A} + d\vec{A}). \end{cases}$$

Разделим на Δt и устремим Δt к нулю. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = (\delta\vec{r}\,\nabla)\vec{u} = \eta(\vec{A}\,\nabla)\vec{u}, \quad \frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \eta\frac{d\vec{A}}{dt},$$

$$\eta\left[\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{A}\nabla)\vec{u}\right] = 0.$$

Перейдем от переменной A к исходным переменным.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{A}\nabla)\vec{u} = 0, \quad \vec{A} = \frac{\vec{a}}{\rho}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{a}}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}(\vec{a}\,\nabla)\vec{u} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{a}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{a}}{dt} - \frac{\vec{a}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \ldots$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$$

$$\cdots = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{\vec{a}}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u}\right] = 0.$$

Окончательно получим:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u} = 0.$$

Полученное равенство более общее, чем

$$\left[\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\nabla)\vec{u}\right] \times \vec{a} = 0,$$

т. к. при выполнении

$$\frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u} = 0.$$

первое равенство выполняется автоматически. *

Таким образом, необходимым условием сохранения как векторных линий, так и интенсивностей векторных трубок, является соотношение:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0.$$

Предыдущее условие является достаточным для сохранения как векторных линий, так и интенсивностей векторных трубок.

Пусть в начальный момент времени заданы векторное поле $\vec{a}$ и векторная линия L.

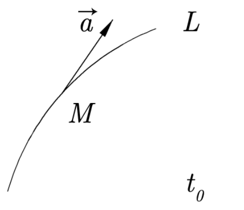

Рис. 3.21

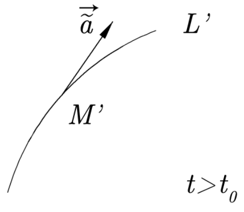

Рис. 3.22

Тогда при $t > t_0$ линия L перейдет в линию L', а точка M в точку M'. Построим новое векторное поле $\vec{\vec{a}}$ так, чтобы сохранялись как векторные линии, так и интенсивности векторных трубок. Тогда необходимым условиям является выполнение равенства:

$$\frac{\vec{\vec{a}}}{dt} - (d\vec{\vec{a}}\,\nabla)\vec{u} + \vec{\vec{a}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0.$$

При $t = t_0$ $\vec{a} = \vec{\vec{a}}$ и при этом $\vec{a}$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\vec{\vec{a}}$. Как было сказано выше, задача линейна и имеет одно решение. Значит, $\vec{a} = \vec{\vec{a}}$ при $t > t_0$ и условие является достаточным для сохранения как векторных линий, так и интенсивностей векторных трубок.

Обозначение:

$$helm\,\vec{a} \equiv \frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a}\,\nabla)\vec{u} + \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0.$$