ЛЕКЦИЯ 6

ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

1. CPT-симметрия. Античастицы

В заключение лекций по теории относительности покажем, каким образом теория относительности и квантовая механика предсказали существование античастиц.

Рассмотрим **обращение времени**: пусть во время движения тело последовательно проходит какие-то стадии. Рассмотрим, хотя бы мысленно, движение, в котором те же стадии проходятся в обратном порядке.

Такое обращение получается в результате преобразования

$$T : t \to -t,$$

то есть отражения относительно оси времени. Отражение времени может приводить к действительно совершающемуся движению, а может и не приводить к нему. Рассмотрим следующий пример.

Пример 14 Представим, что мы бросили вертикально вверх камень. Если бы на Земле не было атмосферы, то при движении камня вниз он проходил бы те же состояния, но с обратной по направлению скоростью. Но, поскольку атмосфера на Земле есть, то такого не произойдет. $*$

Помимо операции обращения времени существует другая операция — **инверсия (зеркальное отражение)**:

$$P : x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z.$$

Наглядно эти операции можно представить следующим образом: пусть некоторое движение снято на пленку. Тогда, запустив эту пленку в обратном порядке, мы совершим операцию обращения. В результате мы сможем увидеть и последовательности событий, которые могли происходить в обратном порядке, и те, которые в обратном порядке произойти не могли. Если мы перевернем пленку — мы совершим операцию зеркального отражения (инвер

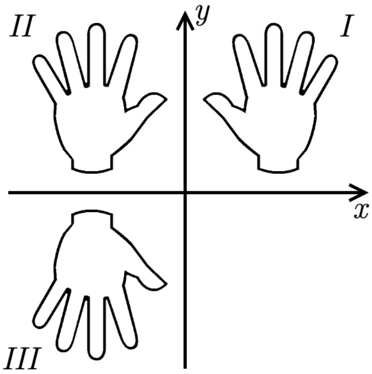

Рис. 6.1

Казалось бы, все это не имеет никакого отношения к античастицам, но это не совсем так.

Легко показать, что четное число зеркальных отражений в евклидовом пространстве эквивалентно повороту. Для наглядности, покажем это на плоскости (см. рис. 6.1). Пусть в первой четверти есть некое изображение (будем называть его изображение I). Отразив его симметрично вертикальной оси Y, получим во второй четверти рисунок II, который нельзя получить поворотом рисунка I. Однако, если отразить изображение II симметрично горизонтальной оси X, получим в третьей четверти рисунок III. Очевидно, что изображения I и III можно совместить поворотом.

Как мы показали ранее, пространство Минковского не Евклидово, а псевдоевклидово. Однако в нем это свойство сохраняется.

Определение 15: PT-преобразованием *в пространстве Минковского называется отражение относительно всех четырех осей.* ♣

PT-преобразование сводится к вращению, поэтому теория, инвариантная относительно вращений, должна быть инвариантна относительно PT-преобразования.

Рассмотрим 4-импульс

$$\underline{P}^i = m\underline{U}^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right), \qquad \underline{U}^i = \frac{dx^i}{\frac{dS}{c}}.$$

При PT-преобразовании получим

$$U^i \to -U^i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \to -\varepsilon, \qquad \vec{p} \to -\vec{p}.$$

Преобразование импульса понятно — получается тот же по величине импульс, но направленный в другую сторону. Но что делать с отрицательной энергией? На второй лекции мы выяснили, что

$$\varepsilon^2 = m^2 + p^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \pm\sqrt{m^2 + p^2}. \tag{6.1}$$

Знак минус из этого равенства мы исключили из следующих соображений: если бы существовала частица с отрицательной энергией, то она, сталкиваясь с другой, передавала бы ей часть своей энергии, и по абсолютному значению энергия отрицательной

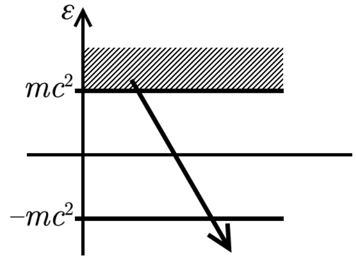

Рис. 6.2

частицы бесконечно увеличивалась. Это бы привело нас к существованию вечного двигателя и нестабильности вакуума.

Из формулы (6.1) видно, что не существует энергий в промежутке от $-mc^2$ до mc^2 (см. рис. 6.2). А поскольку в классической (не квантовой) механике не существует скачков энергии, то отрицательные энергии можно запретить.

В квантовой механике скачки возможны, поэтому, казалось бы, частицы могут переходить в область с отрицательной энергией, что недопустимо. Квантовая механика, выявив такое затруднение, дала интерпретацию, как можно от отрицательных энергий избавиться.

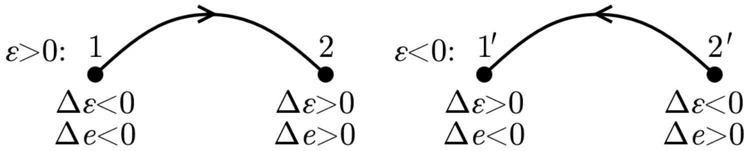

Рис. 6.3

Пусть сначала $\varepsilon > 0$ — энергия частицы больше нуля (см. рис. 6.3). Тогда переход из состояния 1 в состояние 2 можно рассматривать так: частица в состоянии 1 исчезает и вместо нее появляется частица в состоянии 2. Когда частица с положительной энергией в состоянии 1 исчезает, то $\Delta\varepsilon < 0$, а когда появляется в состоянии 2, то $\Delta\varepsilon > 0$.

Для частицы с отрицательной энергией (см. рис. 6.3)все наоборот: при исчезновении отрицательной энергии в состоянии $1'$ $\Delta\varepsilon > 0$, а при появлении такой частицы в состоянии $2'$ $\Delta\varepsilon < 0$.

Если сравнить частицы с положительной и отрицательной энергией становится видно, что движение с отрицательной энергией можно было бы трактовать как движение с положительной энергией, но обращенное по времени. Поскольку есть симметрия также и относительно зеркального отражения, то есть симметрия относительно PT-преобразования.

Такое рассмотрение справедливо для частиц, не имеющих заряда. Если у частицы есть электрический заряд, то, независимо от того, положительная у этой частицы энергия или отрицательная, в состояниях 1 и $1'$ заряд исчезает, то есть $\Delta e < 0$, а в состояниях 2 и $2'$ заряд возникает, то есть $\Delta e > 0$. Тогда нельзя истолковать движение частицы с отрицательной энергией как движение частицы с положительной энергией и тем же зарядом: для этого заряд в $1'$ должен появляться, а в $2'$ — исчезать.

Для того, чтобы избежать этого противоречия предположим, что для каждой заряженной частицы существует близнец — античастица с другим значением заряда.

Оказывается, что пространство Минковского обладает удивительной симметрией — для любого движения заряженных частиц (или полей) всегда существует симметричное движение античастиц, обратное и зеркально отраженное по отношению к движению частиц.

Теорема 3 (CPT-теорема) Для заряженных частиц в пространстве Минковского (где четное число отражений — поворот, а теория относительности инвариантна относительно поворотов) существует CPT-симметрия, где под C понимается замена всех частиц на античастицы. *

Рассмотрим, с какой точностью выполняется CPT-теорема. Согласно этой теореме массы частиц и античастиц должны быть в точности равны друг другу: массы электронов и позитронов, протонов и антипротонов и многих других частиц измерены с точностью до 10^{-7} и совпадают.

Уникальную проверку CPT-теоремы можно провести, наблюдая за распадом K^0-мезонов. В этом случае, при особых условиях, точность проверки CPT-теоремы достигает 10^{-18}.

Это не означает, что эту теорему больше не стоит проверять — одна из важных задач современной физики состоит в проверке CPT-теоремы для взаимодействия нейтрино и антинейтрино.

2. Уравнения Максвелла. Закон Кулона

Уравнения Максвелла в вакууме имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Выражение для **силы Лоренца** в вакууме имеет вид

$$\vec{f} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \tag{6.3}$$

В основе этой системы лежат экспериментальные данные. Во-первых, это **закон Кулона**:

$$\vec{f} = \frac{e_1 e_2}{r^2}\vec{n}. \tag{6.4}$$

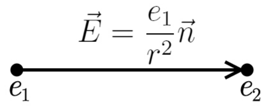

Рис. 6.4

Выражение (6.4) можно представить в виде (см. рис. 6.4):

$$\vec{f} = e_2\vec{E}, \qquad \vec{E} = \frac{e_1}{r^2}\vec{n},$$

то есть заряд e_1 создает вокруг себя поле $\vec{E}$, которое действует на второй заряд e_2.

Казалось бы, это чисто формальная операция. Но это формальная операция, в действительности, содержит в себе интересные возможности:

1. **Понятие поля**: заряженная частица всегда создает некое особое состояние пространства;

2. **Близкодействие** — на заряд e_2 действует напряженность поля в той точке, в которой он находится.

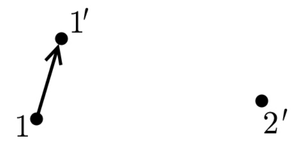

Рис. 6.5

Пусть есть две частицы, и в некоторый момент времени мы быстро сдвигаем первую частицу (см. рис. 6.5). Согласно нашему представлению, вторая частица «почувствует» это изменение лишь через некоторое время, поэтому закон Кулона, который представляет дальнодействие, здесь не применим.

Однако представление о том, что создается поле — применимо: смещение заряда изменяет поле, которое за соответствующее время изменяется в точке 2 и, соответственно, изменяется сила.

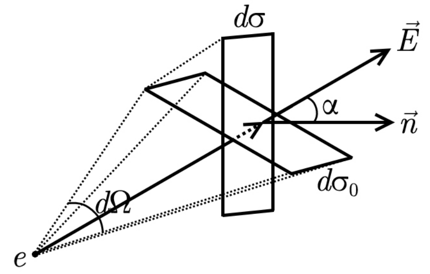

Рис. 6.6

Пусть есть заряд e, создающий напряженность поля. Рассмотрим поток $d\Phi$ через некую площадку (см. рис. 6.6):

$$d\Phi = (\vec{E}\vec{n})\,d\sigma = \frac{e}{r^2}\cos\alpha\,d\sigma = \frac{e}{r^2}\,d\sigma_0,$$

где $\cos\alpha\,d\sigma = d\sigma_0$ — площадь площадки, перпендикулярной направлению $\vec{E}$. Но

$$\frac{d\sigma_0}{r^2} = d\Omega \quad \Rightarrow \quad d\Phi = e\,d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, на который опирается эта площадка.

Следовательно, если вокруг заряда провести некую поверхность и найти поток через эту поверхность (см. рис. 6.7), получим:

$$\Phi = \oint\!\!\oint (\vec{E}\vec{n})\,d\sigma = e\iint d\Omega = 4\pi e. \tag{6.5}$$

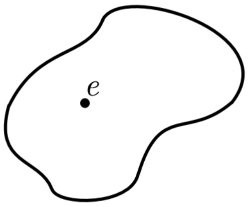

Рис. 6.7

Еще один опытный факт — **принцип суперпозиции полей**. Пусть есть заряды e_1 и e_2, создающие в некоторой точке пространства напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Тогда напряженность поля в этой точке $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Следовательно, поток через поверхность от нескольких зарядов:

$$\Phi = 4\pi \sum_a e_a.$$

Если же заряды распределены непрерывно с некоторой плотностью ρ, то

$$\Phi = 4\pi \iiint\limits_{\rho} \, dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса и учитывая (6.5), получим:

$$\Phi = \iiint \operatorname{div} \vec{E} \, dV \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

в силу того, что выбор объема произвольный. Получили в точности первое из уравнений системы (6.2). Будем считать, что этот закон выполняется не только для постоянных ρ, но и для переменных.

3. Закон Био и Савара. Магнитные заряды. Сила Лоренца

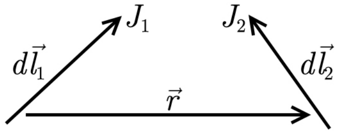

Рис. 6.8

Рассмотрим два элемента тока (см. рис. 6.8). Сила воздействия первого элемента тока на второй определяется следующим выражением:

$$\vec{f} \sim J_1 J_2 \frac{\left[d\vec{l}_2, [d\vec{l}_1, \vec{r}]\right]}{r^3}. \tag{6.6}$$

В выражении (6.6) размерность дроби равна единице, а ток имеет размерность заряда, деленного на время:

$$[J] = \frac{[e]}{[T]}.$$

Следовательно, размерность правой части (6.6) — квадрат размерности тока. Следовательно, если мы хотим согласовать размерности, нужно выражение (6.6) заменить на равенство, правая часть которого будет поделена на размерный коэффициент k:

$$\vec{f} = \frac{J_1 J_2}{k} \frac{\left[d\vec{l}_2, [d\vec{l}_1, \vec{r}]\right]}{r^3}.$$

Из (6.4) видно, размерность силы:

$$[f] = \frac{[e^2]}{[l^2]},$$

где $[l]$ — размерность длины.

Следовательно, можем записать:

$$[f] = \frac{[e^2]}{[T^2][k]} = \frac{[e^2]}{[l^2]} \frac{[l^2]}{[T^2][k]} \quad \Rightarrow \quad [k] = \frac{[l^2]}{[T^2]} = [v^2].$$

Коэффициент пропорциональности должен быть равен квадрату некой скорости. Когда измерили силу взаимодействия между токами, оказалось, что квадрат коэффициента пропорциональности

$$k^2 = 9 \cdot 10^{20} \frac{см^2}{сек^2} = c^2.$$

Трудно представить, чтобы взаимодействие двух токов имело какое-то отношение к скорости света. Риман, обратив внимание на этот факт, предположил, что свет, по-видимому, представляет какие-то электромагнитные колебания.

Поступим так же, как в случае с законом Кулона: будем считать, что первый ток создает поле

$$d\vec{H} = \frac{J_1}{k_1} \frac{[d\vec{l}_1, \vec{r}]}{r^3}, \tag{6.7}$$

которое действует на ток J_2 с силой

$$\vec{f}_{21} = \frac{J_2}{k_2} [d\vec{l}_2, \vec{H}]. \tag{6.8}$$

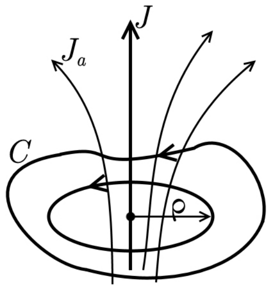

Рис. 6.9

Естественно выбрать коэффициент $k_1 = k_2 = c$. При таком выборе электрическое и магнитное поле имеют одинаковую размерность: $[\vec{H}] = [\vec{E}]$.

Проинтегрировав выражение (6.7) по $d\vec{l}_1$, получим выражение для модуля магнитного поля

$$|\vec{H}| = \frac{2J}{c\rho},$$

где ρ — расстояние от оси (см. рис. 6.9).

Направлено поле будет по окружности в плоскости, перпендикулярной линии тока.

Пусть вокруг тока J есть некоторая замкнутая линия. Циркуляция вдоль этой линии

$$C = \oint\limits_c \vec{H}\,d\vec{l}. \tag{6.9}$$

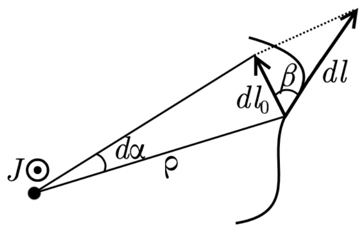

Рис. 6.10

Рассмотрим сначала подынтегральный элемент этого выражения в плоскости, перпендикулярной току (см. рис. 6.10).

$$\vec{H}\,d\vec{l} = H\,dl\cos\beta = \frac{2J}{c\rho}\,dl_0,$$

где $dl_0 = dl\cos\beta$ — проекция приращения dl на направление, совпадающее с направлением магнитного поля $\vec{H}$.

$\frac{dl_0}{\rho}$ — элемент угла, поэтому

$$\vec{H}\,d\vec{l} = \frac{2J}{c}\,d\alpha \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2J}{c}2\pi = \frac{4\pi}{c}J.$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции полей, получим, что если площадку пронизывает несколько токов, то

$$C = \frac{4\pi}{c}\sum_a (J_n)_a,$$

где J_n — нормальные компоненты токов, пронизывающих площадку. Если же эти токи непрерывны, то

$$C = \frac{4\pi}{c}J\iint j_n\,d\sigma,$$

где j_n — плотность тока n-ой компоненты.

С другой стороны, воспользовавшись формулой Стокса для выражения (6.9) — циркуляция по замкнутому контуру равна потоку ротора через поверхность, ограниченную этим контуром. Следовательно

$$C = \iint (\operatorname{rot}\vec{H})_n\,d\sigma = \frac{4\pi}{c}J\iint j_n\,d\sigma \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{6.10}$$

где $\vec{j} = \text{const}$.

Исходя из направления магнитного поля в случае, если оно создано током, видно, что поток магнитного поля через поверхность будет равен нулю, поскольку радиальная составляющая поля отсутствует. Следовательно

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \tag{6.11}$$

Итак, мы получили третье из уравнений (6.2) при условии, что других источников магнитного поля кроме тока не существует. В принципе, могли бы существовать другие источники магнитного поля, а не только ток — **магнитные заряды**.

Отсутствие магнитных зарядов — экспериментальный факт. В классической (не квантовой) механике можно теоретически запретить магнитные заряды. В квантовой механике, как показал Дирак, существование магнитных зарядов не запрещено. Поэтому, когда говорят, что магнитные заряды отсутствуют, это значит, что их существование до сих пор не было обнаружено.

При попытке объединить электромагнитное слабое и сильное взаимодействие во многих теориях возникают магнитные заряды — монополи. Оценка их масс приводит к очень большим значениям, недоступным для современных ускорителей, но, теоретически, они могли рождаться во время горячей стадии нашей Вселенной. Такой монополь мог бы катализировать распад атомов водорода, с выделением его энергии покоя, то есть служить источником энергии.

Итак, существование магнитных монополей теоретически не исключено, поэтому формула (6.11) есть обобщение полученных на сегодняшний день экспериментальных фактов.

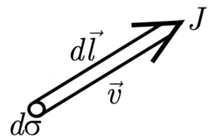

Рис. 6.11

Рассмотрим силу, действующую на элемент тока $J\,d\vec{l}$ (см. рис. 6.11) со стороны магнитного поля (6.8). Ток можем записать в виде:

$$J = \rho \vec{v}\, d\sigma,$$

где ρ — плотность тока,

$d\sigma$ — сечение элемента тока,

$\vec{v}$ — скорость тока, причем $\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{l}$.

В этом случае

$$J\, d\vec{l} = \rho \vec{v}\, d\sigma\, dl.$$

$d\sigma\, dl$ — объем элемента тока. Если умножить его на плотность тока ρ, получим заряд в некотором малом объеме — элемент заряда. С другой стороны, элемент заряда — это заряд одной частицы e, помноженный на число частиц в элементе заряда ΔN, следовательно

$$J\, d\vec{l} = \vec{v} e \Delta N.$$

Тогда сила, приходящаяся на одну частицу, примет вид:

$$\vec{f} = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Вместе с силой, с которой на частицу действует электрическое поле, получаем выражение для силы Лоренца (6.3):

$$\vec{f} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

4. Закон сохранения заряда. Электромагнитная индукция

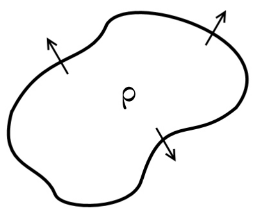

Рис. 6.12

Рассмотрим некий объем, в котором распределен электрический заряд (см. рис. 6.12) с некоторой плотностью ρ. Тогда суммарный заряд, находящийся в этом объеме

$$q = \iiint\limits_V \rho\, dV.$$

Этот заряд может измениться только за счет того, что заряды входят или выходят через поверхность этого объема:

$$-\frac{d}{dt}\iiint\limits_V \rho\, dV = \oiint (\vec{j}\vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{j}\, dV.$$

В силу произвольности выбранного объема может приравнять подынтегральные выражения. В результате получим **закон сохранения заряда** в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{6.12}$$

Возьмем дивергенцию от левой и правой части (6.10). Дивергенция ротора всегда равна нулю, поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0 = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \text{const}.$$

Получили выражение, которое противоречит закону сохранения заряда (6.12) в случае, если $vecj \neq \text{const}$. Поскольку мы принимаем закон сохранения заряда, значит надо привести выражение (6.10) в форму, которая не противоречит закону сохранения заряда.

Запишем

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}') \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}') = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\vec{j}' = -\operatorname{div}\vec{j}.$$

Чтобы выполнялся закон сохранения заряда (6.12) надо, чтобы $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$. Воспользуемся дополнительным током $\vec{j}'$ и определим его так:

$$\operatorname{div}\vec{j}' = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Плотность тока ρ присутствует в первом уравнении (6.2). Считая, что функции непрерывны, можем поменять местами дифференцирование по координате и времени. Тогда получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

следовательно:

$$\operatorname{div}\vec{j}' = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \vec{j}' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Строго говоря, равенство дивергенций некоторых величин не означает равенство самих этих величин. Однако в вакууме это так, поэтому поправленное уравнение (6.10) примет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

то есть в точности второе из урав

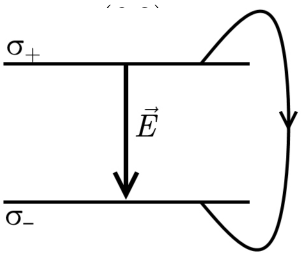

Рис. 6.13

Ток j' называется **током смещения**, а ввел это понятие Максвелл. Пусть есть конденсатор, на одной обкладке которого распределение зарядов σ^+, а на другой σ^- (см. рис. 6.13). Из курса общей физики известно, что напряженность поля $E = 4\pi\sigma$. Если замкнуть конденсатор, то плотность тока

$$|\vec{j}| = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Предположение Максвелла заключалось в том, что ток смещения вызывает магнитное поле. Это предположение проверялось и оказалось верным, что и отражено во втором уравнении (6.2).

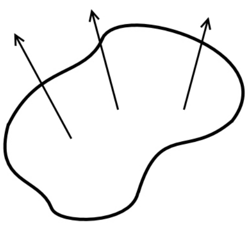

Рис. 6.14

Последнее из уравнений в (6.2) — **закон электро-магнитной индукции Фарадея**. Пусть есть замкнутый контур, и через него есть поток магнитного поля (см. рис. 6.14). Тогда ЭДС:

$$\mathcal{E}_{эдс} = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = \iint (\operatorname{rot}\vec{E})_n\, d\sigma = -\frac{1}{c}\iint H_n\, d\sigma,$$

следовательно

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Воспользовавшись принципом наименьшего действия и одним дополнительным условием, можно было бы получить уравнения Максвелла теоретически. Современное состояние квантовой теории поля таково, что все уравнения Максвелла можно получить из факта существования сохраняющегося заряда.

5. Симметрия уравнений Максвелла

В системе из четырех уравнений Максвелла (6.2) два уравнения векторных и два скалярных. Следовательно, система (6.2) содержит всего восемь уравнений, а неизвестных, при условии что $vecj$ и ρ определены — всего шесть: три компоненты вектора $\vec{E}$ и три компоненты вектора $\vec{H}$.

Если в системе уравнений больше, чем неизвестных, говорят, что система переопределена. Переопределенность системы может вести к противоречию, однако система уравнений Максвелла непротиворечива из-за **симметрии уравнений Максвелла**.

Пусть при заданных $vecj$ и ρ найдено некоторое решение системы (6.2):

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t). \end{cases} \tag{6.13}$$

Покажем, что уравнения Максвелла симметричны относительно обращения времени: возьмем $t' = -t$. Тогда, если (6.13) — решение уравнений Максвелла, то и

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}(\vec{r}, -t), \\ \vec{H}_1 = -\vec{H}(\vec{r}, -t) \end{cases} \tag{6.14}$$

также являются решениями уравнений Максвелла.

Как видно из (6.14), электрическое поле остается неизменным, а магнитное меняет знак на противоположный. При этом $\vec{j}' \to -\vec{j}$, а плотность зарядов ρ остается неизменной.

Первое из четырех уравнений (6.2) очевидно остается неизменным. Во втором уравнении в (6.2) $\vec{H}$ меняет знак, $\vec{j}$ меняет знак, $\vec{E}$ не меняет знак, однако в производной по времени само время меняет знак, поэтому в общем уравнение остается неизменным. Аналогичным образом можно показать, что и два других уравнения в (6.2) остаются неизменными.

Уравнения Максвелла также симметричны относительно инверсии, то есть при замене $\vec{r} \to -\vec{r}$. Покажем, что если (6.13) — решение уравнений Максвелла, то и

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = -\vec{E}(-\vec{r}, t), \\ \vec{H}_2 = \vec{H}(-\vec{r}, t) \end{cases} \tag{6.15}$$

также являются решениями уравнений Максвелла.

В (6.15) электрическое поле не меняет знак, магнитное поле меняет знак, плотность тока $\vec{j}$ меняет знак, а плотность зарядов ρ не меняет знак.

В первом из четырех уравнений в (6.2) $\vec{E}$ меняет знак, но при взятии дивергенции от электрического поля координаты также меняют знак, поэтому первое уравнение не меняется. Во втором уравнении $\vec{H}$ не меняет знак, но координаты, по которым мы дифференцируем магнитное поле, меняют знак, $\vec{E}$ и $\vec{j}$ также меняют знак, поэтому второе уравнение инвариантно относительно (6.15). Аналогично можно показать, что и два оставшихся уравнения в (6.2) не изменяются.

Таким образом, система уравнений Максвелла инвариантна относительно PT-преобразования, которому удовлетворяют процессы, подчиняющиеся специальной теории относительности.

Поэтому можно предположить, что система уравнений Максвелла удовлетворяет специальной теории относительности. Позднее мы покажем, что система уравнений Максвелла, в отличие от законов Ньютона, не требует никакой специальной корректировки — она целиком удовлетворяет теории относительности.

Можно также показать, что система уравнений Максвелла удовлетворяет CPT-преобразованию: действительно, при смене знака заряда все величины $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$ и ρ меняют значения на противоположные. Легко показать, что в этом случае система уравнений (6.2) не меняется.

6. Вектор-потенциал и скалярный потенциал

Попробуем решить систему уравнений (6.2). Уравнения, в которых нет зарядов и токов (третье и четвертое) называются первой парой уравнений Максвелла. Чтобы $\operatorname{div}\vec{H}$ была всегда равна нулю, положим, что

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \tag{6.16}$$

так как дивергенция ротора всегда равняется нулю.

Подставив (6.16) во второе уравнение первой пары уравнений Максвелла, получим, что

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{rot}\vec{A}}{\partial t}.$$

Величины в уравнениях Максвелла считаются непрерывными, поэтому, переставив производные, получим следующее соотношение

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Нельзя сказать, что выражение, от которого берется ротор, обязательно равно нулю если ротор этого выражения равен нулю. В общем случае это выражение равно градиенту некой скалярной функции:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi. \tag{6.17}$$

Величины $\vec{A}$ и ϕ — вспомогательные величины. $\vec{A}$ называется **векторным потенциалом**, а ϕ — **скалярным потенциалом**. Эти вспомогательные величины определены неоднозначно: если к $\vec{A}$ прибавить градиент некоторой произвольной функции, то

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(x, y, z, t) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A}. \tag{6.18}$$

Это означает, что $\vec{H}' = \vec{H}$. Найдем преобразования $\vec{E}$. Согласно (6.17)

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi'.$$

Подставив значение $\vec{A}$ из (6.18) в это выражение, получим

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} f - \vec{\nabla}\phi'.$$

Чтобы $\vec{E}'$ совпало с $\vec{E}$ необходимо, чтобы

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} f - \vec{\nabla}\phi' = -\vec{\nabla}\phi.$$

Следовательно, получим

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{6.19}$$

Итак, величины $\vec{A}$ и ϕ определены с точностью до градиента произвольной функции. Этот факт сыграл решающую роль в построении других теорий — теории слабого взаимодействия, единой теории электрослабого взаимодействия, сильного взаимодействия.

Поля, которые определены с точностью до градиентов или, иногда, с точностью до поворотов в пространстве называются **калибровочными полями**. В этом смысле электромагнитное поле — калибровочное поле.

Подставив калибровочные поля (6.18) и (6.19) во вторую пару уравнений Максвелла (первое и второе уравнение системы (6.2)), получим:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \tag{6.20}$$

Напомним, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - (\vec{\nabla})^2\vec{A} = \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}.$$

Введем **оператор Д'Аламбера**:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

тогда уравнение (6.20) примет вид:

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} - \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Перенеся оператор Д'Аламбера в левую часть, а все остальное — в правую, получим

$$-\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \tag{6.21}$$

Добавим и вычтем из левой части первого уравнения в (6.2) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$. Тогда получим:

$$\operatorname{div}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 4\pi\rho.$$

Выделив оператор Д'Аламбера, получим:

$$-\Box\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = 4\pi\rho. \tag{6.22}$$

Уравнения (6.21) и (6.22) значительно упростились бы, если бы в обоих выражениях скобка оказалась равной нулю. Позднее мы покажем, что всегда можно выбрать функцию f так, чтобы $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ оказалось равным нулю. В этом случае получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \Box\phi = -4\pi\rho, \\ \Box\vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases}$$