ЛЕКЦИЯ 11

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ТОКОВ. ТЕОРЕМА ЛАРМОРА. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ

1. Магнитное поле системы токов на большом расстоянии. Гиромагнитное отношение

Рассмотрим магнитное поле постоянных токов. Пусть имеется постоянный (не зависящий от времени) то $\vec{j}$, а плотность зарядов положим равной нулю: $\rho = 0$. В этом случае система уравнений Максвелла для магнитного поля примет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Воспользуемся обычной подстановкой $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$. При этом, согласно условию Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} = 0,$$

поскольку $\rho = 0$ (электрическое поле отсутствует либо оно могло бы быть постоянным). В этом случае первое уравнение (11.1) примет вид:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad\Rightarrow\quad \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{11.2}$$

В векторном уравнении (11.2) содержится три уравнения — по одному для каждой компоненты. Это уравнение можно сравнить с уравнением для электрического потенциала:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho. \tag{11.3}$$

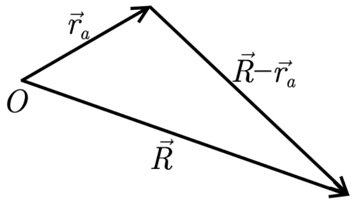

Рис. 11.1

Для точечного заряда a, отстоящего от начала координат O на расстоянии $\vec{r}_a$ при условии, что точка наблюдения находится на расстоянии $\vec{R}$ от начала координат (см. рис. 11.1), решение запишется в виде:

$$\phi = \frac{e}{|\vec{R} - \vec{r}_a|}.$$

В случае, если зарядов несколько, решение уравнения (11.3) примет вид:

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{R} - \vec{r}_a|}.$$

Наконец, если бы заряд был распределен с некоторой плотностью ρ, то решение представлялось бы в виде тройного интеграла:

$$\phi = \iiint \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{R} - \vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}.$$

Используя отдельные заряды, можно записать это выражение по-другому. Рассмотрим следующее выражение:

$$\vec{j} d^3 r' = \rho \vec{v} d^3 r' = e_a \vec{v}_a, \tag{11.4}$$

поскольку $\rho d^3 r'$ — элемент заряда e_a.

Следовательно, решение (11.2) может быть записано в виде

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \vec{v}_a(t)}{|\vec{R} - \vec{r}_a(t)|}. \tag{11.5}$$

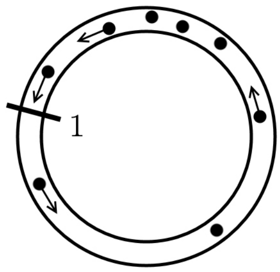

Рис. 11.2

Несмотря на то, что рассматривали магнитное поле постоянных токов, в выражение (11.5) входит движение зарядов, зависящее от времени. В книге Ландау-Лифшица показано, что в виде (11.5) удобнее записывать некоторые преобразования.

В действительности выражение (11.5) надо понимать как осредненное по движению частиц:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\overline{\sum_a \frac{e_a \vec{v}_a(t)}{|\vec{R} - \vec{r}_a(t)|}}. \tag{11.6}$$

Рассмотрим, что означает осреднение по движению. Пусть в некотором кольце движется один заряд (см. рис. 11.2).

Если следить за прохождением заряда в каждый момент времени, то нельзя сказать, что в кольце есть постоянный ток. Однако, если рассматривать ток, осредненный за промежуток времени значительно больший, чем период обращения частицы, то среднее значение будет постоянным.

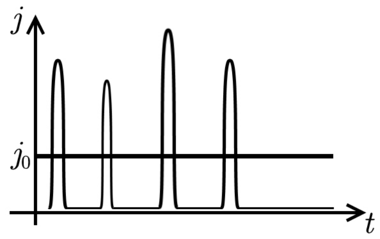

Рис. 11.3

Если в кольце много зарядов, можно установить детектор (1), фиксирующий прохождение каждого заряда. Тогда зависимость тока от времени будет иметь «пилообразный» вид (см. рис. 11.3), однако осреднение по времени даст некий ток j_0.

Итак, выражение (11.6) надо рассматривать как среднее значение.

В дальнейшем часто будем пользоваться простой теоремой из курса математического анализа

Теорема 5 Пусть существует некоторая функция $f(t)$. Определим ее среднее значение следующим образом:

$$\overline{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Тогда, если функция $f(t)$ изменяется в определенных пределах, то среднее значение ее производной равно нулю. $*$

Док-во: Для доказательства этой теоремы вычислим производную функции $f(t)$ по времени:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{f(T) - f(0)}{T} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Найдем поле системы движущихся зарядов на значительно расстоянии от зарядов, то есть $|\vec{r}_a| \ll R$. Раскладывая знаменатель по малому параметру, получим:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\overline{\sum_a \frac{e_a \vec{v}_a(t)}{R}} + \frac{1}{c}\overline{\sum_a \frac{e_a \vec{v}_a(t)(\vec{r}_a(t)\vec{R})}{R^3}}. \tag{11.7}$$

Величина в первом слагаемом (11.7) есть не что иное, как производная дипольного момента:

$$\sum_a e_a\vec{r}_a = \vec{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\overline{\sum_a \frac{e_a\vec{v}_a(t)}{R}} = \frac{1}{c}\frac{\overline{\dot{\vec{d}}}}{R}$$

Тогда выражение (11.7) примет вид:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\frac{\overline{\dot{\vec{d}}}}{R} + \frac{1}{cR^3}\overline{\sum_a e_a\vec{v}_a(t)(\vec{r}_a(t)\vec{R})}. \tag{11.8}$$

Согласно теореме 5 средним от производной дипольного момента можно пренебречь. В дальнейшем, при рассмотрении излучения окажется, что среднее от производной дипольного момента дает основной вклад в решение. Однако, как было сказано ранее, для постоянных токов этим членом можно пренебречь.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое. Воспользовавшись формулой для производной сложной функции, получим:

$$\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R}) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{R})\right) - \vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{R}).$$

Усреднив это выражение по времени, получим, что, согласно теореме 5, среднее от производной по времени равно нулю, поэтому

$$\overline{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R})} = -\overline{\vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{R})}. \tag{11.9}$$

Выражение (11.9) можно записать следующим образом:

$$\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R}) = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R}) - \vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{R})\right).$$

Из векторного анализа известно, что выражение в скобках — двойное векторное произведение:

$$\left[[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{R}\right] = \vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R}) - \vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{R}),$$

следовательно, осреднив по времени, получим:

$$\overline{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{R})} = \frac{1}{2}\overline{\left[[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{R}\right]}$$

В этом случае выражение (11.8) примет вид:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{[\vec{\mu}, \vec{H}]}{R^3}, \qquad \vec{\mu} = \frac{1}{2c}\sum_a e_a[\vec{r}_a, \vec{v}_a]. \tag{11.10}$$

Величина $\vec{\mu}$ называется **магнитный момент**. Магнитный момент характеризует среднее распределение токов.

Воспользовавшись (11.4), можем записать магнитный момент для непрерывного распределения. В этом случае

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\iiint [\vec{r}, \vec{j}]\, d^3r.$$

Магнитное поле $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$, то есть ротор от (11.10). Вычислив его, получим:

$$\vec{H} = \frac{3(\vec{\mu}\vec{n})\vec{n} - \vec{\mu}}{R^3}.$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ — единичный вектор.

Таким образом, на больших расстояниях систему токов можно заменить магнитным диполем.

Рассмотрим подробнее выражение для магнитного момента. Пусть в системе зарядов отношение заряда частицы к ее массе постоянно:

$$\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m} = \text{const}.$$

Поделив и умножим выражение для магнитного момента (11.10) на m_a, получим:

$$\vec{\mu} = \overline{\frac{1}{2c}\sum_a \frac{e_a}{m_a}[\vec{r}_a, m_a\vec{v}_a]} = \frac{e}{2mc}\overline{\sum_a [\vec{r}_a, m_a\vec{v}_a]} = \frac{e}{2mc}\vec{L}, \tag{11.11}$$

где $\vec{L}$ — осредненный момент импульса.

Отношение магнитного момента к орбитальному называется **гиромагнитным отношением**. Его принято измерять в единицах $\frac{e}{2mc}$. Согласно (11.11), получим:

$$\vec{\mu} = g\frac{e}{2mc}\vec{L}, \tag{11.12}$$

где в нашем случае $g = 1$.

Для электрона, который представляет собой маленький магнит, магнитный момент направлен по спину, то есть по моменту, и величина g с точностью до тысячных близка к 2.

Это значение не было теоретически обоснованным до создания Дираком релятивистских уравнений квантовой механики. Из них автоматически получалось, что $g = 2$.

В дальнейшем выяснилось, что g не в точности равно 2, существуют поправки к значению g. Бывший заведующий кафедрой теоретической физики В.Б. Берестецкий и О.И. Крохин придумали эксперимент по проверке квантовой электродинамики на малых расстояниях, так называемый $g - 2$ эксперимент.

Первая поправка к $g - 2$ оказалась равной

$$g - 2 = \frac{\alpha}{2\pi},$$

где α — постоянная сверхтонкой структуры.

Поправки к g связаны с квантовыми явлениями на малых расстояниях: значение $g - 2$ до сих пор уточняется экспериментально и теоретически.

Пусть есть круговой ток (см. рис. 11.4). Можно показать, что магнитный момент в этом случае равен:

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c}S\vec{\nu},$$

где S — площадь контура,

$\vec{\nu}$ — перпендикуляр к плоскости контура.

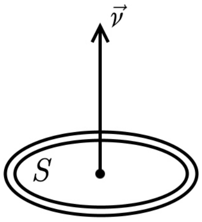

Рис. 11.4

2. Силы, действуюшие на систему токов со стороны магнитного поля

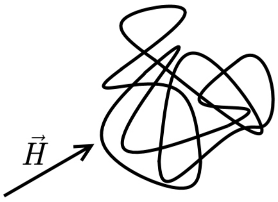

Рис. 11.5

Рассмотрим силы, которые действуют со стороны внешнего электромагнитного поля на систему токов.

Пусть есть система токов (см. рис. 11.5), на которую действует внешнее магнитное поле $\vec{H}$. Внутри системы источниками магнитного поля будем пренебрегать, поэтому система уравнений (11.1) примет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases}$$

Сила, действующая на систему токов, находится осреднением по времени

$$\vec{F} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c} [\vec{v}_a(t), \vec{H}]}. \tag{11.13}$$

Если $\vec{H}$ — однородное поле ($\vec{H} = \text{const}$), то сила (11.13) будет равна нулю. Позднее на лекции будет рассмотрен случай, когда поле не постоянное, но слабо меняется со временем:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + (\vec{r}_a \vec{\nabla}) \vec{H},$$

Для постоянного магнитного поля момент силы (11.13) оказывается равен:

$$\vec{K} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c} [\vec{r}_a [\vec{v}_a, \vec{H}]]} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c} \Big((\vec{r}_a \vec{H}) \vec{v}_a - (\vec{r}_a \vec{v}_a) \vec{H} \Big)}, \tag{11.14}$$

согласно определению двойного векторного произведения.

Поскольку

$$\vec{r}_a \vec{v}_a = \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_a^{\,2}}{2},$$

то, согласно теореме 5 при осреднении по времени вычитаемое в (11.14) равно нулю.

Воспользовавшись (11.9) и последующим выводом, преобразуем выражение (11.14) следующим образом:

$$\vec{K} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c}\left((\vec{r}_a\vec{H})\vec{v}_a - (\vec{v}_a\vec{H})\vec{r}_a)\right)} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c}[[\vec{r}_a, \vec{v}_a]\vec{H}]}$$

Воспользовавшись определением магнитного момента (11.10), получим выражение для **момента силы в однородном поле**:

$$\vec{K} = [\vec{\mu}, \vec{H}]. \tag{11.15}$$

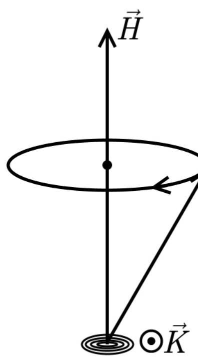

Рис. 11.6

Рассмотрим задачу о прецессии магнитного момента (см. рис. 11.6). Согласно (11.12), магнитный момент связан с моментом количества движения следующим соотношением:

$$\vec{\mu} = g\frac{e}{2mc}\vec{L},$$

где $\vec{L}$ — момент этой системы токов. Из этого соотношения очевидно, что векторы $\vec{\mu}$ и $\vec{L}$ сонаправленные.

Действующий момент сил будет изменять момент импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K}. \tag{11.16}$$

Пусть магнитное поле $\vec{H}$ направлено вдоль оси z. Тогда векторное произведение $[\vec{\mu}, \vec{H}]$ будет давать приращение момента, направленное из плоскости рисунка 11.6. Следовательно, возникнет прецессия вдоль оси z.

Подставляя в выражение (11.16) выражение для момента силы (11.15) и магнитного момента (11.12), получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K} = -g\frac{e}{2mc}[\vec{H}, \vec{L}].$$

Частота прецессии в этом случае имеет следующим вид:

$$\vec{\Omega} = -g\frac{e}{2mc}\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}]. \tag{11.17}$$

Легко видеть, что такое движение описывает именно прецессию. Умножим левую и правую часть (11.17) скадярно на вектор $\vec{L}$. Тогда правая часть (11.17) обратится в ноль как скалярное произведение ортогональных векторов, поэтому

$$\vec{L}\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}^2 = \text{const}. \tag{11.18}$$

Умножим теперь левую и правую часть (11.17) скалярно на $\vec{H}$. Правая часть тогда снова обратится в ноль как скалярное произведение ортогональных векторов, поэтому получим следующее выражение:

$$\vec{H}\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}\vec{L} = \text{const}. \tag{11.19}$$

Движение с параметрами (11.18) – (11.19) возможно лишь в случае, когда орбитальный момент вращается по правилу левого винта вокруг направления магнитного поля с частотой прецессии Ω.

Эта прецессия имеет очень важное значение для парамагнитного, ядерного резонанса.

Очень красивый метод, распространившийся во всем мире, был придуман в МФТИ профессором Смилга В.П. и нынешним заведующим кафедрой теоретической физики Белоусовым Ю.М — метод μsR (muon-spin-rotation).

Мюон представляет собой тяжелый электрон (его масса в 200 раз больше массы электрона). Существуют μ^+ и μ^- частицы. Например, положительный мюон распадается на

$$\mu^+ \to e^+ \nu_e \tilde{\nu}_\mu,$$

где e^+ — позитрон;
ν_e — электронное нейтрино;
$\tilde{\nu}_\mu$ — антимюонное нейтрино.

Позитрон распадается в основном по направлению момента μ-мезона. Следовательно, если следить за направлением большого количества μ-мезонов с течением времени (или за соединениями μ-мезона с электроном — в них электрон будет определять прецессию, так как его магнитный момент значительно больше), можно определить частоту прецессии.

Получается, что прецессия магнитного момента может, с одной стороны, служить часами, а с другой — частота прецессии мюонов позволяет измерить магнитное поле.

Если бы этот метод не требовал получения μ-мезонов на ускорителях, он был бы лучше многих других методов, поскольку работает даже при очень малой интенсивности.

3. Теорема Лармора

Прецессия магнитного момента есть проявление общей теоремы Лармора

Теорема 6 (Теорема Лармора) В связанной системе (например, в атоме или молекуле) с релятивистским движением, в которой отношение зарядов к массе частиц одинаковое, магнитное поле можно исключить во вращающейся системе координат. *

Док-во: Функция Лагранжа для системы имеет вид:

$$L = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a^2}{2} - U(\dots) + \frac{1}{c}\sum_a e_a \vec{A}_a \vec{v}_a, \tag{11.20}$$

где $U(\dots)$ — потенциальная энергия взаимодействия множества частиц.

В однородном поле для некоторой частицы

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H}, \vec{r}].$$

Если ввести вращающуюся с частотой $\vec{\omega}$ систему координат, то

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Подставляя эти выражения в функцию Лагранжа (11.20), получим:

$$L = \sum_a \frac{m_a \vec{v}'^2}{2} + \sum_a m_a \vec{v}_a [\vec{\omega}, \vec{r}_a] + \sum_a \frac{m_a [\vec{\omega}, \vec{r}_a]^2}{2} - U(\dots) + \frac{1}{c}\sum_a \frac{1}{2} e_a \vec{v}_a [\vec{H}, \vec{r}_a].$$

Пренебрегаем квадратичным членом, поэтому, выбрав частоту $\vec{\omega}$ так, чтобы сумма второго и последнего слагаемого так оказалась равной нулю, получится тем самым исключить магнитное поле:

$$\frac{1}{2c} e_a \vec{H} = -m_a \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = -\frac{e}{2mc}\vec{H},$$

поскольку, по условию теоремы, отношение заряда к массе для всех частиц одинаково.

Как уже было сказано ранее, квадратичным членом в функции Лагранжа можно пренебречь, если

$$\omega |\vec{r}_a| \ll |\vec{v}_a| \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{mc} H \cdot a \ll v, \tag{11.21}$$

■

где a — характерный размер системы. Теорема доказана.

Воспользовавшись оценкой (11.21), получим для атома при каких значениях магнитного поля квадратичным членом можно пренебречь:

$$v \sim 10^{18} \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad a \sim 10^{-8} \text{ см}, \quad m_e \sim 10^{-27} \text{ г}, \quad e \sim 4{,}8 \cdot 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad |\vec{H}| \leqslant 10^9 \text{ Гс}.$$

С помощью взрывомагнитного генератора А.Д. Сахарова достигнута напряженность магнитного поля $H \sim 2 \cdot 10^7$ Гс.

В пульсарах достигается поле $\sim 10^{12} - 10^1 3$ Гс. Предполагается, что существуют магнетары, в которых поле достигает $10^1 6$ Гс, превышая Швингеровский предел.

Если бы атомы существовали при таких полях, то они имели бы форму иголки — радиус вращения в магнитном поле был бы значительно меньше атомных размеров.

4. Силы, действующие на систему токов в неоднородном поле

Пусть поле не является однородным, но слабо меняется с течением времени:

$$\vec{H}(t) = \vec{H} + (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H}.$$

В этом случае сила, действующая на систему токов, примет вид:

$$\vec{F} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}[\vec{v}_a, \vec{H} + (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H}]}. \tag{11.22}$$

В этом выражении векторное произведение $[\vec{v}_a, \vec{H}]$ — полная производная, поэтому, согласно теореме 5, при усреднении по времени

$$\overline{[\vec{v}_a, \vec{H}]} = 0.$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое в выражении (11.22). Считая $\vec{r}_a$ постоянным, получим

$$(\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{r}_a\vec{H}), \tag{11.23}$$

, поскольку

$$\vec{\nabla}(\vec{r}_a\vec{H}) = (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H} + [\vec{r}_a, rot\vec{H}] = (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H},$$

так как предполагаем, что поле задается внешними источниками (поэтому внутри $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$).

Подставляя (11.23) в (11.22), получим:

$$\vec{F} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}[\vec{v}_a, (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{H}]} = \overline{\sum_a \frac{e_a}{c}[\vec{v}_a, \vec{\nabla}(\vec{r}_a\vec{H})]} = \overline{\sum_a -\frac{e_a}{c}[\vec{\nabla}, \vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{H})]}. \tag{11.24}$$

Ранее для второй компоненты векторного произведения в этом выражении было получено:

$$\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{H}) = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{H}) - \vec{r}_a(\vec{v}_a\vec{H})\right) = \frac{1}{2}[[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{H}].$$

Следовательно, выражение (11.24) примет вид:

$$\vec{F} = \overline{\sum_a -\frac{e_a}{2c}\left[\vec{\nabla}, [[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{H}]\right]}$$

Учитывая выражение для магнитного момента (11.10), окончательно получим, что сила, действующая на систему токов в неоднородном магнитном поле, будет равна:

$$\vec{F} = -\,\mathrm{rot}[\vec{\mu}, \vec{H}] = (\vec{\mu}\vec{\nabla})\vec{H},$$

то есть сила в магнитном поле есть производная по направлению магнитного момента $\vec{\mu}$ от магнитного поля $\vec{H}$.

Если рассматривать силу как градиент некоторого потенциала

$$\vec{F} = -\nabla U, \tag{11.25}$$

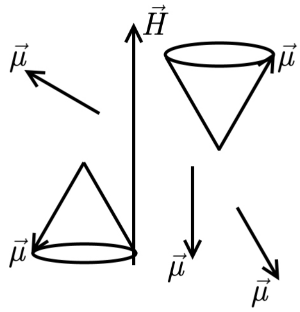

Рис. 11.7

то получим энергию магнитного диполя во внешнем поле

$$U = -\vec{\mu}\vec{H}. \tag{11.26}$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть есть совокупность магнитных моментов, включая магнитное поле (см. рис. 11.7). Например, это может быть газ (молекула кислорода, например, имеет магнитный момент).

Согласно полученным ранее выражениям, в газе должна происходить прецессия. Из опыта известно, что будет происходить упорядочивание магнитных моментов, однако теория допускает их произвольную прецессию.

Откуда же возникает упорядочивание? Согласно выражению для энергии (11.26), при столкновении частиц, обладающих магнитным моментом, они будут переходить в более низкое энергетическое состояние, а выделившаяся при этом энергия будет переходить в тепловое движение. Таким образом, при включении поля температура газа растет.

Наоборот, пусть в сильном магнитном поле есть выстроенная система магнитных моментов. Тогда при выключении поля возникнет обратный эффект — газ будет охлаждаться. Это один из метод

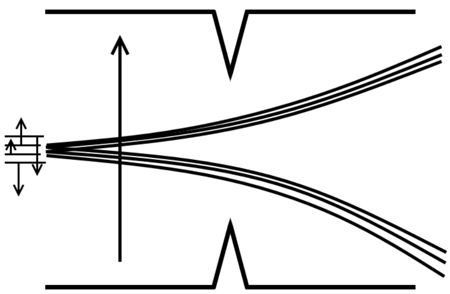

Рис. 11.8

Пусть есть магнит с наконечниками, около которых магнитное поле неоднородное (см. рис. 11.8). Тогда если пучок с различными магнитными моментами влетает в этот магнит, то на выходе из магнита пучок будет расходиться.

Таким образом можно показать, что направления моментов, согласно квантовой механике, квантуются: не все направления магнитных моментов возможны. Если бы это было не так, то пучок расходился бы непрерывно, выраженных максимумов в нем не было бы.

Однако в эксперименте это не так — пучок расходится на отдельные полоски, что дает возможность измерить магнитные моменты. Этот опыт в 1919 году предложили П.Л. Капица и Н.Н. Семенов, но не смогли его осуществить из-за тяжелого положения в Петрограде. Этот опыт провели Штерн и Герлах, за что позднее были удостоены Нобелевской премии.

5. Адиабатический инвариант

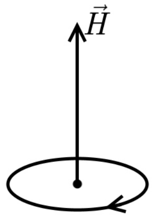

Рис. 11.9

Пусть есть магнитное поле (см. рис. 11.9): вдоль магнитного поля скорость движения постоянна, а перпендикулярно ему движение происходит по окружности.

Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \tag{11.27}$$

Скорость $\vec{v}$ определяется соотношением:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}.$$

Подставляя выражение для импульса в (11.27), получим:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{c}[\vec{H}, \vec{v}].$$

Выражая из этого равенства производную по времени, получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{ec}{\varepsilon}[\vec{H}, \vec{v}] = [\vec{\omega}, \vec{v}] \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = -\frac{ec\vec{H}}{\varepsilon}. \tag{11.28}$$

Радиус орбиты частицы в этом случае равен:

$$\omega R = v \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v}{\omega} = \frac{v\varepsilon}{ecH} = \frac{cp_\perp}{eH}. \tag{11.29}$$

Это очень удобная формула для численных расчетов. Если импульс измерять в электрон-Вольтах в секунду, а магнитное поле в Гауссах, то:

$$[p] = \frac{эB}{c}, \qquad [H] \quad \Rightarrow \quad R = \frac{p}{300 \cdot H}.$$

Умножив дифференциальное уравнение в (11.28) на $\vec{v}$ получим, что $\vec{v}^2 = \text{const}$. Доможив его же на $\vec{H}$ получим, что наклон частицы также будет постоянным, поэтому частица будет прецессировать.

Пусть теперь поле изменяется так, что за период обращения частицы оно изменяется незначительно:

$$\Delta H \ll H.$$

Из выражения (11.29) очевидно, что если поле немного выросло, то радиус окружности незначительно уменьшается. Рассчитаем приращение энергии за период в этом приближении.

Магнитное поле само по себе не совершает работы, однако при его изменении возникает электрическое поле, совершающее работу. Работа, которую совершает электрическое поле за период, определяется следующим выражением:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{T} = -\frac{1}{T}\oint e\vec{E}\,d\vec{l}. \tag{11.30}$$

Приближение заключается в том,, что контурный интеграл (11.30) вычисляется по окружности, не учитывая, что на самом деле это незамкнутая кривая. В нашем случае частица движется по правилу левого винта, а все математические выкладки (например, теорема Стокса) относятся к правому. Поэтому в (11.30) перед интегралом возникает знак минус.

Воспользовавшись теперь формулой Стокса, уравнениями Максвелла и выражением (11.30), получим изменение энергии за период:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{T} = -\frac{1}{T}\oint e\vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{T}e\iint (\mathrm{rot}\,\vec{E})_n\,d\sigma = \frac{1}{T}\frac{e}{c}\frac{dH}{dt}\pi R\cdot R = \frac{v}{2}\frac{e}{c}R\frac{dH}{dt}.$$

Учитывая, что $d\varepsilon = v_\perp\,dp_\perp$, получим:

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}\frac{cp_\perp}{eH}\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\frac{p_\perp}{H}\frac{dH}{dt}.$$

Записав это выражение в дифференциалах, получим:

$$2\frac{dp_\perp}{p_\perp} = \frac{dH}{H} \quad\Rightarrow\quad \ln p_\perp^2 = c\ln H.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \mathrm{const}. \tag{11.31}$$

Эта величина сохраняется не только при постоянном поле, но и при достаточно слабом его изменении, поэтому она носит название **адиабатического инварианта**.

Из (11.31) видно, что, увеличивая магнитное поле, можно ускорять частицы. Ускоритель, основанный на этом принципе, называется бетатрон.

То же самое соотношение имеет место в случае постоянного по времени неоднородного магнитного поля. В этом случае, если выполнено условие, что за период обращения поле изменится незначительно, то будут выполнены условия для существования адиабатического инварианта.

Перейдем в систему, которая движется со скоростью $\vec{v}_\parallel$ вместе с частицей (см. рис. 11.10).

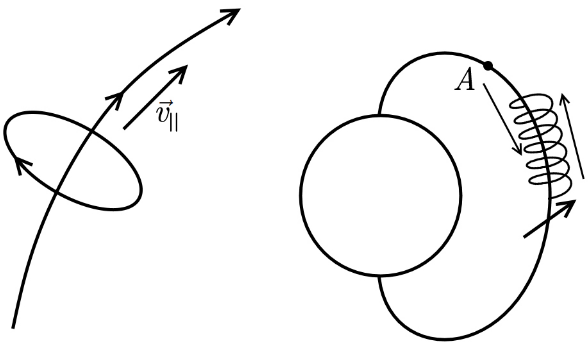

Рис. 11.10

Тогда $p'_{\perp} = p_{\perp}$ и продольное поле $H' = H$. В системе, движущейся вместе с частицей, поле будет не постоянным, а переменным если соблюдаются условия адиабатического инварианта (11.31).

Это соотношение приводит к очень важным техническим и природным следствиям. Рассмотрим магнитные силовые линии Земли (см. рис. 11.10). Пусть частица (1) движется по спирали вдоль силовой линии.

Энергия сохраняется поэтому:

$$p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad (p_{\parallel}^0)^2 + (p_{\perp}^0)^2 = p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2,$$

где нулевой индекс соответствует начальному импульсу релятивистской частицы.

Тогда, воспользовавшись (11.31), получим:

$$p_{\parallel}^2 = (p_{\parallel}^0)^2 - (p_{\perp}^0)^2 \left(\frac{H}{H_0} - 1 \right).$$

Если $H > H_0$, то $p_{\parallel}$ теоретически может обратиться в ноль. В этом случае частица, достигнув некоторой точки A, начнет движение в обратном направлении до другого полюса. Это есть не что иное, как модель радиационных поясов Земли, которая, к сожалению, не была предсказана те

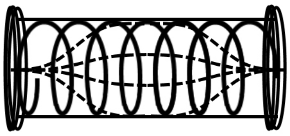

Рис. 11.11

Обнаружили эти пояса только когда запустили первые спутники. Оказалось, что в этих поясах существует большой уровень радиации.

Два радиационных пояса земли называются **поясами Ван Аллена**. Они, фактически, являются ловушкой для заряженных частиц.

Адиабатический инвариант — основа для получения так называемого магнитного зеркала. Рассмотрим цилиндрический сосуд, внутри которого есть катушка, создающее магнитное поле. По краям цилиндра намотаны дополнительные катушки. Тогда силовые линии направлена как на рисунке 11.11.

Получается, что пройти сквозь получившуюся магнитную «пробку» смогут только частицы, обладающие нулевым поперечным импульсом. В Новосибирске сейчас работает

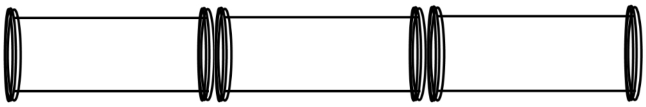

Рис. 11.12

улучшенная версия этой установки, состоящая из нескольких последовательно соединенных катушек (см. рис. 11.12). Частица, прошедшая через одну из пробок, сталкивается с плазмой в другой, приобретает поперечный импульс и через другую «пробку» пройти уже не сможет.