ЛЕКЦИЯ 9

КИНЕТИКА ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ. КВАНТОВЫЙ РОСТ ЗАРОДЫША

1. Спектр ферми-жидкости и плазмы

Ферми-жидкость — это образование, в чьём фазовом пространстве все заполнено ниже поверхности Ферми. Небольшое количество газа, который движется вблизи поверхности Ферми, не сохраняет число своих частиц: оно зависит от температуры. Чем больше температура, тем больше слой, в котором эти частицы возбуждены.

Будем рассматривать не только ферми-заряженную жидкость, то есть электроны в плазме, электроны в металле, но и нейтральные ферми-жидкости, то есть ^{3}He. Будем исходить из кинетического уравнения, причем столкновения будем считать редкими ($\omega\tau \gg 1$), и поэтому сначала нужно написать кинетическое уравнение без интеграла столкновений.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v\nabla)f + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Речь идет о ферми-жидкостях при низких температурах, то практически все ферми-частицы занимают область фазового пространства под поверхностью Ферми, а все возбуждения двигаются только в узкой области в районе поверхности Ферми, и поэтому можно сказать, что энергия выражается следующим образом:

$$\epsilon = v_{\mathrm{f}}\,|p - p_{\mathrm{f}}\,|.$$

В небольшой окрестности аппроксимируем квадратичный спектр линейным.

Будем искать функцию распределения как сумму равновесной функции и малой добавки к ней:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)},$$

а $f^{(1)}$ представим как

$$f^{(1)} = \left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi}\right|\chi,$$

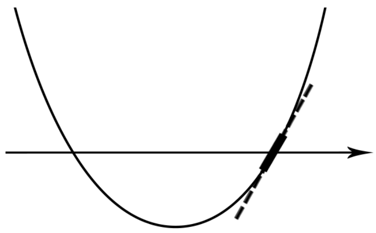

Рис. 9.1

где энергия ξ отсчитывается от поверхности Ферми.

Перепишем слагаемое с производной по импульсу:

$$\dot{p}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = -\dot{p}v\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi}\right|.$$

Сила, которая действует на частицы, слабая, поэтому можно писать $f^{(0)}$. Знак «минус» после знака «равно» появляется из-за того, что $f^{(0)}$ — это убывающая функция.

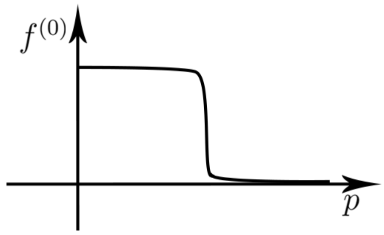

Рис. 9.2

Теперь запишем уравнение Больцмана через Фурье-образы:

$$(-i\omega + i\vec{k}\vec{v})f_k(p) + (\dot{p}_\alpha)_k \frac{\partial f_0(p)}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Важно уточнить следующее: раньше был рассмотрен случай с внешним электрическим потенциалом, когда $\dot{p}$ полагали равным eE. Теперь же речь идет о ферми-жидкости. В ней вся эволюция происходит благодаря тому, что на данную частицу действуют окружающие квазичастицы в огромном количестве (самосогласованное поле: взаимное влияние частиц друг на друга).

Учитывая интегральный характер взаимодействия, переписываем $\dot{p}$ в следующем виде:

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial r}\int \frac{d^3r'\,d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} U(r-r') f^{(1)}(r',p')$$

— под интегралом стоит $f^{(1)}$, поскольку равновесная функция не дает вклада: если квазичастицы со всех сторон расположены симметрично, то суммарная сила равна нулю.

Если рассматривать нейтральные частицы, то

$$U(r-r') = U_0\,\delta(r-r').$$

После интегрирования имеем:

$$(\dot{p}_\alpha)_k = -ik_\alpha U_0\, g_{\mathrm{f}} {<}\chi{>},$$

где g_{f} — плотность состояний, ${<}\chi{>}$ — среднее по углам.

Если рассматривать случай заряженной, а не нейтральной частицы, то $U = \frac{e^2}{r}$, и тогда

$$U_k = \frac{4\pi e^2}{k^2};$$

$$(-i\omega + i\vec{k}\vec{v})\left|\frac{\partial f^{(0)}(p)}{\partial \xi}\right| \chi_k - ik_\alpha v_\alpha g_{\mathrm{f}} U_k \left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi}\right| {<}\chi{>} = 0.$$

Сократим на $\left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi}\right|$ и усредним:

$${<}\chi{>} = U_k\, g_{\mathrm{f}} \left\langle \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \right\rangle {<}\chi{>},$$

$$1 = U_k\, g_{\mathrm{f}} \left\langle \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \right\rangle$$

— отсюда получаем дисперсионное уравнение для $\omega = \omega(k)$.

$$J = \left\langle \frac{\vec{k}\vec{v}}{\omega + \vec{k}\vec{v}} \right\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{kv\cos\theta}{\omega - kv\cos\theta}\, d\frac{\cos\theta}{2}.$$

Введём обозначение: $\omega/_{kv} = s$.

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos\theta d\cos\theta}{s - \cos\theta} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{(s-x)dx}{s-x} + \frac{1}{2}s\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{s-x} = -1 - \frac{1}{2}s\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

$$-1 + \frac{1}{2}s\ln\frac{s+1}{s-1} = \frac{1}{U_0\, g_{\mathrm{f}}}.$$

Тогда $\omega_{\mathrm{He}_3} = s v_{\mathrm{f}}\, k$ — линейный звуковой спектр для ^{3}He **(нуль-звук)**. Его скорость порядка v_{f}. Для ^{3}He отношение $\frac{1}{U_0\, g_{\mathrm{f}}}$ велико, величина s близка к единице, и v_{f} небольшая, поэтому и скорость нуль-звука тоже невелика.

В случае ферми-газа нужно заменить U_0 на U_k:

$$\frac{1}{U_k\, g_{\mathrm{f}}} = \frac{k^2}{4\pi e^2 g_{\mathrm{f}}}.$$

Теперь же рассмотрим длинноволновую часть спектра: $s \gg 1$. Разложим $J(s)$ в ряд до второго члена:

$$\frac{k^2}{4\pi e^2 g_{\mathrm{f}}} = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{5s^4}.$$

Если пренебречь вторым членом, то получим спектр:

$$s^2 = \frac{4}{3}\frac{\pi e^2 g_{\mathrm{f}}}{k^2} \quad \Rightarrow \quad s \sim \frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$\omega_{\text{плазм}} \sim \mathrm{const}.$$

2. Учёт квантовых явлений в задаче о росте зародышей в пересыщенных средах

Рассмотрим фазовую диаграмму ^{4}He.

Когда переходим через фазовую кривую, разделяющую сверхтекучее и твердое состояния, при низких температурах, повышая давление через 26 атмосфер, то происходит фазовый переход в жидком сверхтекучем (или не сверхтекучем) ^{4}He (рис. 9.4). В жидком состоянии возникают зародыши твердой фазы, то есть маленькие кристаллики. Найдем зависимость, с какой скоростью происходит рост твердых кристалликов в зависимости от температуры.

Явление заключается в том, что энергия есть функция от радиуса. Когда зародыш очень маленький, главную роль у него играет энергия поверхностного натяжения $4\pi\sigma r^2$,

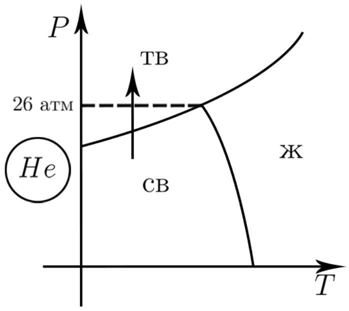

Рис. 9.3

то есть энергия растет, и образование зародышей является невыгодным. Однако, если увеличить радиус, то, поскольку изменение химического потенциала есть отрицательная величина, надо к поверхностной энергии, добавить $-\delta\mu$ на число частиц в зародыше, то есть $\frac{4}{3}\pi r^3 n_ж$.

Начиная с некоторого размера $R_С$, функция начинает падать, и образование зародыша становится выгодным. Если пренебречь диффузией, то все кристаллики, зародыши твердой фазы меньше критического размера схлопываются (им выгодно уменьшать энергию). Если нет диссипативных процессов, то большие кристаллы превратятся в один огромный кристалл, а маленькие просто уйдут в жидкую фазу.

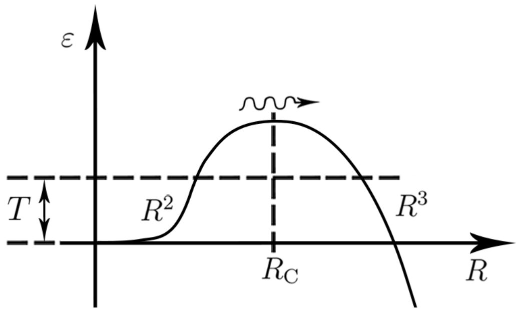

Рис. 9.4

Но в действительности также есть поток справа налево благодаря тому, что есть еще диффузионный член в кинетическом уравнении. Это просто гидродинамический поток в пространстве размеров. Также еще есть коэффициент $D\frac{df}{dM}$ — диффузия. Благодаря диффузионному члену возникают флуктуационные процессы во все направления, и поэтому даже если в начале все кристаллы были слева, они постепенно, благодаря тепловым флуктуациям, перетекают через максимум. Например, весь жидкий ^{4}He под давлением становится твердым.

Для теплового движения и перескока через барьер нужна температура. Если температура достаточно низкая, то зародыши с энергией образования больше, чем температура, запрещены, то есть нет возможности перепрыгнуть через барьер.

Рассмотрим ситуацию с точки зрения квантовой механики.

Гамов обратил внимание, что случай α-распада объясняется простым образом.

α-частица вначале имеет положительную энергию, и поэтому это есть квазистационарное состояние (неустойчивое). Частица может перейти на другую сторону (а в ядре

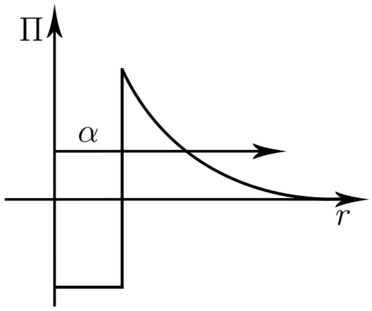

Рис. 9.5

температура равна нулю, и поэтому флуктуационный процесс невозможен) только квантовым переходом.

Применим теорию Гамова к образованию твердых кристаллов гелия в жидком гелии.

Энергия тела складывается из кинетической и потенциальной энергий:

$$H = \epsilon(r) + \frac{p^2}{2m}.$$

Благодаря кинетической энергии есть вероятность просочиться через потенциальный барьер:

$$w \sim \exp\left(-\int\limits_1^2 |p| dr\right).$$

Потенциальная энергия $U = \Pi(R)$ зародыша радиуса R имеет вид энергии одного атома $\Pi(R)$ (рис. 9.5), умноженной на на число атомов в зародыше ($M = \frac{4}{3}\pi R^3 n_{\text{sol}}$).

Надо учесть, что закритический зародыш растет. И, следовательно, со всех сторон на этот зародыш налетают молекулы жидкости. Кинетическая энергия зародыша равна суммарной энергии атомов, диффундируюших к растущему зародышу.

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} nv = 0.$$

Рассматривается квазистационарный процесс с постоянной плотностью жидкости, поэтому:

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0.$$

В этой задаче

$$v(r) = -\left(\frac{R}{r}\right)^2 v(R).$$

Берём от этого выражения интеграл и находим $\epsilon(r)$. И тогда полная энергия:

$$H = M\Pi + E_{\text{kin}}.$$

$$E_{\text{kin}} = \int\limits_R^\infty 4\pi r^2 n_{\text{sol}}\, dr\, \frac{m}{2} v^2 = 4\pi n_{\text{sol}} \frac{mv^2(R)}{2} \int\limits_R^\infty r^2 dr \left(\frac{R}{r}\right)^4 =$$
$$= 4\pi n_{\text{sol}} \frac{mv^2(R)R^3}{2} = 3\,\frac{mv^2(R)R^3}{2} M,$$

где M — число частиц внутри зародыша.

Поскольку $v(R) = \dot{R}\,\frac{\delta n}{n}$, где δn — разность плотностей,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\alpha \dot{R}^2 M(R), \quad \alpha \sim \frac{\delta n}{n}.$$

Обозначим $x = {}^{R}\!/_{R_\text{C}}$. Тогда

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M_0 x^3 \left(\dot{x}\right)^2, \quad M_0 \sim \alpha \frac{4}{3}\pi R_\text{C}^3 n_{\text{sol}}.$$

Отсюда нетрудно найти лагранжиан

$$L = E_{\text{kin}} - U$$

и гамильтониан:

$$H = E_{\text{kin}} + U = \frac{1}{2} M_0 x^3 \left(\dot{x}\right)^2 + U = E.$$

Вычисляем импульс:

$$p = \frac{\partial E}{\partial x}$$

и подставляем выражение для импульса в формулу для вероятности. Основной вклад в показатель экспоненты дает окрестность максимальной высоты потенциального барьера:

$$w \sim \exp\left[-\int |P| dx\right] \sim \exp\left[-\gamma\sqrt{U_{\max} - E}\right].$$

Проникновение частиц на ту сторону барьера достигается либо туннелированием при низких температурах, либо благодаря тепловым флуктуациям. При некоторой температуре оба процесса сравниваются, когда вероятность туннелирования и вероятность перехода через барьер одинакова. Это происходит при некоторой температуре T^*.

Эта задача была исследована экспериментально. Ученые Паршин и Цимболенко исследовали зависимость скорости процесса w от температуры и увидели, что в начале, как и должно быть,

$$w \sim \exp\left(-\frac{A}{T}\right)$$

— **закон Аррениуса**.

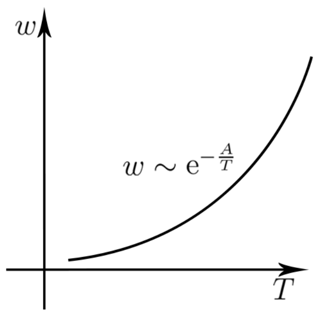

Рис. 9.6

При температурах, стремящихся к нулю, скорость процесса становилась не экспоненциальной, а гораздо более медленной.