

---

---

## ЛЕКЦИЯ 11

---

# СИНЕРГЕТИКА. ГАЗ ВАКАНСИЙ. ЭФФЕКТ ЗЕНФТЛЕБЕНА

**Синергетика** — это теория диссипативных структур. В отличие от обычной теории кинетических процессов, когда все идет плавно и нет ничего, кроме релаксации или мелкомасштабных коллективных возбуждений, синергетика изучает группы явлений, которые описываются нелинейными уравнениями.

Наиболее актуальная задача из синергетики на данный момент — это описание реакции Жаботинского (химия).

### 1. Задача Вольтерра – Лотки

Существует пример **квазихимической реакции**. Это задача Вольтерра – Лотки: вместо химических веществ они рассмотрели взаимодействие живых объектов. Также эта задача известна под названием «задача о хищниках и жертвах». Она формулируется следующим образом:

Есть остров, на котором живут два вида животных: хищники (волки) и жертвы (овцы). Кажется, что у задачи нет равновесного решения — например, если волков будет много, а овец мало, то волки их съедят, а позднее и сами погибнут от голода.

Напишем уравнения, которое описывают систему.

$$\frac{dN_s}{dt} = kN_s - mN_wN_s,$$
$$\frac{dN_w}{dt} = -pN_w + qN_wN_s.$$

Изменение количества представителей каждого вида в единицу времени пропорционально себе же (рождение). Также необходимо добавить слагаемые, связанные с процессом поедания овец. Они будут квадратичны.

$$\frac{dN_s}{dt} = N_s(k - mN_w),$$

$$\frac{dN_w}{dt} = N_w(-p + qN_s).$$

Видно, что у задачи есть равновесное решение. Оно будет иметь место в том случае, когда скобки будут равны нулю: овцы появляются на свет и поедаются волками с одинаковой скоростью, а волки едят овец или умирают от голода так, что тоже не меняют своего количества.

$$N_s^{(0)} = \frac{p}{q},$$

$$N_w^{(0)} = \frac{k}{m}.$$

На графике это будет отображаться одной точкой.

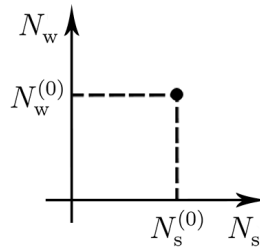


Рис. 11.1

Теперь рассмотрим, что будет не в точке равновесия. Понятно, что имеет значение, находится ли система близко к равновесию или далеко от него.

Попробуем избавиться от нелинейности. Для этого домножим первое и второе уравнения на  $q$  и  $p$  соответственно и сложим друг с другом. Тогда мы получим уравнение для  $M = qN_s + mN_w$ :

$$\frac{dM}{dt} = qkN_s - pmN_w.$$

Поскольку  $N_s^{(0)} = \frac{p}{q}$ , а  $N_w^{(0)} = \frac{k}{m}$ , то уравнение выглядит образом:

$$\frac{dM}{dt} = kp \frac{N_s}{N_s^{(0)}} - kp \frac{N_w}{N_w^{(0)}} = kp \left( \frac{N_s}{N_s^{(0)}} - \frac{N_w}{N_w^{(0)}} \right).$$

Если положение системы находится рядом с критической точкой, то есть с точкой квазистабильности, то взвешенная сумма овец и волков сохраняется, то есть величина  $M$  играет роль массы живности на острове. И она сохраняется в том случае, если мы находимся рядом с критической точкой, то есть, когда  $N_s$  и  $N_w$  близки к своим равновесным значениям.

Теперь посмотрим, что будет вдалеке от равновесия. Для этого преобразуем комбинацию уравнений по-другому:

$$\frac{d}{dt}(p \ln N_s + k \ln N_w) = p(k - mN_w) + k(-p + qN_s) = -pmN_w + kqN_s = \frac{dM}{dt}.$$

Рассматривается эволюция большого числа особей (частиц), и поэтому велико не только число самих животных, но и логарифмы. Если так, то выполняется:

$$N \gg \ln N.$$

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

Получается, что  $\frac{dm}{dt} \approx 0$  в логарифмическом приближении.

Учитывая вышесказанное, отобразим на графике зависимость количества волков и овец. Пусть в начальный момент времени  $M = M_i$  — далеко от равновесного.

$N_s$  будет уменьшаться, а  $N_w$  будет расти. Это будет продолжаться до тех пор, пока  $N_s$  не достигнет своего равновесного значения. Далее обе величины будут уменьшаться, и с достижением  $N_w$  своего равновесного значения  $N_s$  начнет увеличиваться. Потом процесс вернется в начальное состояние.

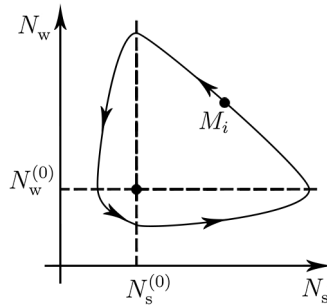


Рис. 11.2

Теперь посмотрим, что будет вблизи равновесия.

$$N_s = N_s^{(0)} + N_s^{(1)},$$

$$N_w = N_w^{(0)} + N_w^{(1)}.$$

Напишем эти уравнения в линейном приближении по  $N^{(1)}$ .

$$\frac{dN_s^{(1)}}{dt} = -m \frac{p}{q} N_w^{(1)},$$

$$\frac{dN_w^{(1)}}{dt} = \frac{qk}{m} N_s^{(1)}.$$

Это уравнение осциллятора.

$$\frac{d^2 N_s^{(1)}}{dt^2} = -m \frac{p}{q} \frac{qk}{m} N_s^{(1)} = -pk N_s^{(1)}.$$

Частота осциллятора:  $\omega = \sqrt{pk}$ .

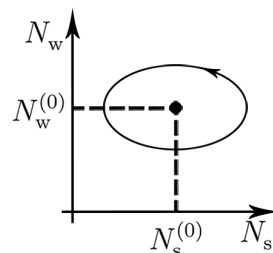


Рис. 11.3

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



*Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).*

Теперь видно, что волки и овцы (молекулы, частицы) подвижны (они стараются равномерно заселить остров). Добавим диффузионные члены в систему уравнений:

$$\frac{dN_s}{dt} = kN_s - mN_w N_s + D_s \Delta N_s,$$
$$\frac{dN_w}{dt} = -pN_w + qN_w N_s + D_w \Delta N_w.$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$N_w = N_w^{(0)} + \alpha \cos Kx.$$

Тогда

$$p_{\text{эфф}} = p + D_w K^2.$$

Диффузия приводит к тому, что процессы, связанные с  $N_w$ , убыстряются. Рассмотрение колебаний неоднородности  $N_s$  тоже приводит к убыстрению скорости релаксации этих членов. Получается, что никаких качественных изменений диффузия не дает, то есть она только убыстряет процессы, а не способствует увеличению диссипации. Если рассматривать близкий к равновесию случай, то все равно решением будет эллипс, только движение по эллипсу будет осуществляться с большей скоростью.

## 2. Дырочный газ. Междоузлия

Описанные ниже явления часто происходят в ядерных реакторах, которые работают порядка года. В стенках таких реакторов непрерывно рождаются дефекты, а именно, когда нейтрон попадает на атом железа, то железо вылетает из своего равновесного положения и улетает на какое-то расстояние и летит дальше между другими узлами решетки. Такой дефект называется **междоузлием**, а узел, который остался без железа, называется **дыркой** или **вакансией**.

И те, и другие образования имеют эффективную массу порядка массы атомов железа. Тем не менее, как показывают расчеты, в междоузлии атомы железа двигаются быстро, и они достигают стенок реакторов, осаждаются на стенках, и происходит так называемое явление разбухания. В результате реактор разрушается.

Когда в материале много дырок, то будет так называемый **газ вакансий**. Как и всякий газ, он может находиться либо в равновесном состоянии, либо когда становится достаточно много атомов, то это состояние становится уже не равновесно относительно слипания дырок друг с другом.

Дырки постепенно слипаются друг с другом, и образуются поры. Здесь полная аналогия с процессом образования дождя, то есть крупные поры можно рассматривать, как капли. Если они докритические, то они, как и в случае дождя, схлопываются. Опять есть два процесса: рост и аннигиляция зародышей.

Если есть два закритических зародыша недалеко друг от друга, то они будут поглощать докритические, и между ними концентрация дефектов будет меньше, чем в среднем, и, следовательно, они будут притягиваться друг к другу.

Если, написать соответствующие нелинейные уравнения в духе задачи Вольтерра – Лотки, то увидим, что с течением времени, если подождать около года или больше,



*Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)*

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

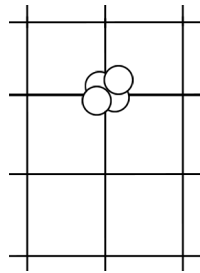


Рис. 11.4

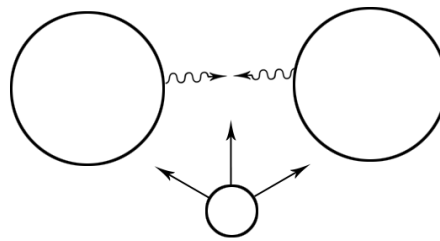


Рис. 11.5

возникает квазирешетка из надкритических пор, то есть они находятся на больших расстояниях друг от друга, но повторяют периодичность самого кристалла. Это обусловлено тем, что все коэффициенты в кристаллах имеют одинаковую симметрию.

Был проведен следующий эксперимент: в массу металла напускали много ионов, которые образовали массу дефектов. Сначала распределение дефектов по размерам от 0 до  $L$  было примерно одинаковым. Далее около стенок появлялись всплески.

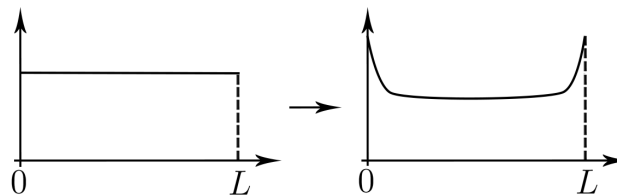


Рис. 11.6

Следующий этап был таким: если число капель было ниже равновесного, то получалась яма, и возникала следующая структура:

Если ждать, то вместо однородного тумана появлялись концентрические круги из вещества, которое образовано из крупных капель.

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

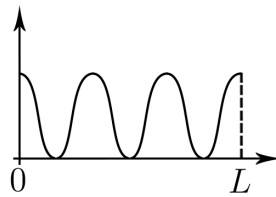


Рис. 11.7

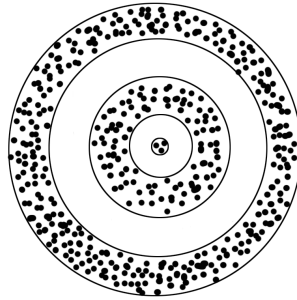


Рис. 11.8

### 3. Эффект Зенфтлебена

Рассмотрим молекулярный кислорода в магнитном поле. Кислород в основном состоянии обладает спином, равным единице. Молекула кислорода есть «гантелька» из двух атомов кислорода, у которой суммарный спин равен единице.

Кроме внутреннего движения, то есть спинового движения, есть еще орбитальные движения (вращения). Вращательный момент:  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$ .

Спин, который есть у кислорода, привязан к вращательному моменту, и поэтому магнитный момент уже порядка электронного момента, и поэтому имеет место эффект прецессии магнитного момента в магнитном поле.

Так как спины прецессируют, то их столкновение с друг с другом уже будет иметь другую вероятность. Если прецессии нет, тогда все происходит в одной плоскости, и есть одно сечение, а если прецессия есть, то уже происходит разупорядочение этих ориентаций, и вероятность столкновения будет другой. И это приводит к тому что частота столкновений меняется, а если меняется частота, то меняется и коэффициент теплопроводности. Следовательно, если подействовать на молекулярный кислород внешним магнитным полем, то изменится теплопроводность. Эту теплопроводность можно измерить, и тогда можно будет узнать, сколько кислорода находится в разделительных колонках, с помощью которых делаются урановые вещества, с помощью которых уже потом производят атомные бомбы. В этом состоит суть **диффузионного метода разделения**.

Ясно, что скорость этого разделения зависит от того, сколько кислорода там находится. Перед физиками была поставлена задача: узнать, какая концентрация кислорода в этих газовых колонках. Экспериментаторы приняли решение измерять теплопроводность этого газа, в котором, кроме радиоактивных веществ ( $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$ ) еще были примеси молекул кислорода. Их количество измерялось изменением коэффициентов теплопроводности в магнитном поле (**эффект Зенфтлебена**).

