
ЛЕКЦИЯ 8

ОДНОВРЕМЕННАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1. Одновременная измеримость физических величин

В общем случае состояние системы задается не одной величиной, а несколькими, но эти величины должны быть одновременно измеримы. Требования к физической величине заключаются в следующем:

- Наличие у волновой функции состояний, в которых она имеет вполне определенное значение;
- Такие состояния должны составлять полный базис в пространстве собственных векторов: любое другое состояние должно быть суперпозицией базовых состояний.

Если две величины одновременно измеримы, то собственное состояние одной величины является, одновременно, собственным состоянием другой величины. Собственные состояния — собственные вектора операторов, отвечающих соответствующим физическим величинам.

Пусть есть две физические величины, которые отвечают операторам \hat{A} и \hat{B} . Требование одновременной измеримости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{A}|a, b\rangle &= a|a, b\rangle \\ \hat{B}|a, b\rangle &= b|a, b\rangle\end{aligned}\tag{8.1}$$

Для того, чтобы две физические величины были одновременно измеримы, операторы этих величин должны коммутировать:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}.$$

Определение 14: Разность величин $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ называется **коммутатором**:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (8.2)$$



Рассмотрим следующее свойство:

Свойство 15 Коммутатор представляет собой антиэрмитов оператор. *

Док-во: Операторы \hat{A} и \hat{B} являются операторами некоторых физических величин, поэтому они являются эрмитовыми. Ранее было показано, что

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}\hat{A}.$$

Таким образом, оператор, соответствующий произведению двух операторов — необязательно эрмитов. Он является эрмитовым только в случае, когда

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}. \quad (8.3)$$



Запишем коммутатор, эрмитово сопряженный к коммутатору (8.2):

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B})^\dagger - (\hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A}, \hat{B}],$$

то есть коммутатор — антиэрмитов оператор. ■

Следовательно, коммутатор может быть представлен в следующем виде:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad \hat{C}^\dagger = \hat{C},$$

то есть \hat{C} — эрмитов оператор.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1 Для того, чтобы две физические величины были одновременно измеримы, необходимо и достаточно, чтобы их операторы коммутировали (чтобы коммутатор был равен нулю). *

Док-во: Докажем необходимость.

Пусть две физические величины одновременно измеримы, то есть у них имеются общие собственные состояния (8.1). Подействовав на первое выражение в (8.1) слева оператором \hat{B} , а на второе выражение в (8.1) слева оператором \hat{A} , получим:

$$\hat{B}\hat{A}|a, b\rangle = a\hat{B}|a, b\rangle = ab|a, b\rangle$$

$$\hat{A}\hat{B}|a, b\rangle = b\hat{A}|a, b\rangle = ba|a, b\rangle$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Разность этих двух выражений окажется равной нулю:

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|a, b\rangle = (ab - ba)|a, b\rangle = 0. \quad (8.4)$$

Поскольку любое состояние системы $|\Psi\rangle$ может быть представлено как суперпозиция собственных состояний $|a, b\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab} |a, b\rangle,$$

то коммутатором операторов \hat{A} и \hat{B} можно подействовать на произвольное состояние $|\Psi\rangle$:

$$[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle = \sum_{a,b} [\hat{A}, \hat{B}]|a, b\rangle = 0|\Psi\rangle = 0,$$

согласно выражению (8.4).

Таким образом, необходимым условием для одновременной измеримости физических величин, то есть наличия у них общих собственных функций, является коммутруемость из операторов.

Докажем теперь достаточность. Пусть коммутатор

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Докажем, что в этом случае операторы \hat{A} и \hat{B} имеют общие собственные функции. Пусть у оператора \hat{A} есть собственное состояние $|a\rangle$:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle. \quad (8.5)$$

Подействовав на это состояние оператором \hat{B} , а на результат оператором \hat{A} , получим, поскольку операторы коммутируют:

$$\hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = \hat{B}\hat{A}|a\rangle = a(\hat{B}|a\rangle). \quad (8.6)$$

Таким образом, оператор \hat{A} , действуя на вектор $\hat{B}|a\rangle$, возвращает тот же самый вектор с собственным значением a .

Следовательно, результатом действия оператора \hat{B} на собственное состояние $|a\rangle$ является вектор, являющийся собственным состоянием оператора \hat{A} .

Возможны два случая. В первом случае a — невырожденное собственное значение, то есть значению a соответствует только один собственный вектор $|a\rangle$.

Согласно (8.5), (8.6), существует два собственных вектора, принадлежащих одному невырожденному собственному значению. Следовательно, эти собственные вектора пропорциональны друг другу, то есть

$$\hat{B}|a\rangle = \lambda|a\rangle,$$

где λ — коэффициент пропорциональности.

Второй случай соответствует тому, что a — вырожденное собственное значение, то есть существует несколько собственных векторов

$$|a, \alpha\rangle = |a, 1\rangle, |a, 2\rangle, \dots, |a, r\rangle, \quad \alpha = 1 \dots r, \quad (8.7)$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

где r — кратность вырождения.

Поддействовав оператором \hat{B} на собственное состояние $|a, \beta\rangle$

$$\hat{B}|a, \beta\rangle, \quad 1 \leq \beta \leq r,$$

получим вектор, который будет собственным вектором оператора \hat{A} (доказательство аналогично первому случаю):

$$\hat{A}(\hat{B}|a, \beta\rangle) = a|a, \beta\rangle, \quad 1 \leq \beta \leq r.$$

Эта формула отражает факт, что результирующий собственный вектор может быть любым из собственных векторов, отвечающих вырожденному собственному значению, поскольку суперпозиция собственных векторов

$$\sum_{\beta=1}^r h_{\beta} |a, \beta\rangle \quad (8.8)$$

также является собственным вектором оператора \hat{A} .

Поддействовав оператора \hat{A} на (8.8), получим:

$$\hat{A} \left(\sum_{\beta=1}^r h_{\beta} |a, \beta\rangle \right) = a \sum_{\beta=1}^r h_{\beta} |a, \beta\rangle.$$

Все вектора (8.8), принадлежащие собственному значению a , составляют подпространство, поскольку любая их линейная комбинация дает то же самое собственное значение a . Из этих векторов можно составить комбинацию, которая будет собственным вектором оператора \hat{B} :

$$\hat{B} \sum_{\beta} c_{\beta} |a, \beta\rangle = \lambda \sum_{\alpha'} c'_{\alpha'} |a, \alpha'\rangle. \quad (8.9)$$

Для нахождения искомой линейной комбинации необходимо определить значения коэффициентов c_{β} . Для этого умножим левую и правую часть выражения (8.9) слева на $\langle a, \alpha|$. В этом случае в правой части останется только произведение λc_{α} :

$$\sum_{\beta} \langle a, \alpha| \hat{B} |a, \beta\rangle c_{\beta} = \lambda c_{\alpha}.$$

В этой записи содержится система из r уравнений:

$$\begin{cases} B_{11}c_1 + B_{12}c_2 + \dots + B_{1r}c_r = \lambda c_1 \\ \vdots \\ B_{r1}c_1 + B_{r2}c_2 + \dots + B_{rr}c_r = \lambda c_r \end{cases} \quad (8.10)$$

Для краткости, поскольку a одинаково в бра-векторе и кет-векторе, запишем условие наличия нетривиального решения в следующем виде:

$$|B_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0 \quad (8.11)$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Относительно λ детерминант (8.11) представляет собой полином степени r

$$P_r(\lambda) = 0,$$

то есть существует r решений

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r,$$

которые будут действительны, поскольку \hat{B} — эрмитов оператор.

Вычислив эти значения и подставляя λ_1 в систему уравнений (8.10), сможем выразить все остальные коэффициенты через c_1 :

$$\begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} \\ \vdots \\ c_r^{(1)} \end{pmatrix}$$

где верхний индекс совпадает с индексом подставляемого значения λ .

Величину коэффициента c_r несложно найти, потребовав, чтобы норма соответствующего вектора была равна единице. Аналогично можно из линейных комбинаций собственных векторов оператора \hat{A} , принадлежащих определенному вырожденному собственному значению, найти линейные комбинации, которые будут собственными векторами оператора \hat{B} . Теорема доказана. ■

С физической точки зрения утверждение теоремы 1 понятно: если две физические величины, которым отвечают соответственно операторы \hat{A} и \hat{B} , одновременно измеримы, то оператор

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \text{ — эрмитов.}$$

Это возможно, согласно (8.3), только в том случае, когда

$$\hat{B}\hat{A} = \hat{A}\hat{B} \quad \Rightarrow \quad [\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

2. Соотношение неопределенностей

Рассмотрим случай, когда физические величины не коммутируют и, следовательно, одновременно не измеримы. В этом случае существует связь между вероятностями разброса этих величин около среднего значения.

Пусть существует некоторое состояние $|\Psi\rangle$, которое можно представить следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |f_i\rangle, \quad \hat{f} |f_i\rangle = f_i |f_i\rangle.$$

В этом случае среднее значение величины f определяется следующим образом:

$$\bar{f} = \langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle = \sum_i |c_i|^2 f_i.$$

Рассмотрим график зависимости вероятности $|c_i|^2$ значений f_i (см. рис. 8.1). Разброс

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

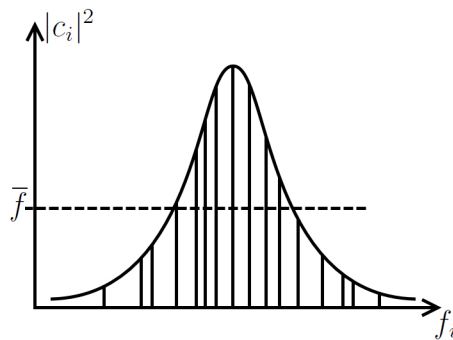


Рис. 8.1

около среднего значения называется **дисперсией**:

$$\delta f = \sum_i |c_i|^2 (f_i - \bar{f})^2 = \langle \Psi | (\hat{f} - \bar{f})^2 | \Psi \rangle.$$

Раскрыв скобки в этом выражении, получим следующую формулу:

$$\overline{\hat{f}^2} - 2\bar{f}\bar{\hat{f}} + \bar{f}^2 = \overline{\hat{f}^2} - (\bar{f})^2,$$

то есть дисперсия равна разности среднего от квадрата физической величины и квадрата среднего ее значения.

Если две величины не коммутируют, то существует связь между дисперсиями этих двух тел в различных состояниях. Эта связь называется **соотношением неопределенностей**.

В литературе иногда упоминается принцип неопределенности, который не стоит путать с этим соотношением. На лекциях для построения квантовой механики был использован принцип суперпозиции состояний и принцип соответствия. Однако, оказывается, квантовую механику можно построить, пользуясь принципом неопределенностей, что и было сделано Гайзенбергом.

Пусть есть две некоммутирующие величины \hat{F} и \hat{G} :

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{C}, \quad \hat{C}^\dagger = \hat{C},$$

то есть \hat{C} — эрмитов оператор.

Составим операторы \hat{f} и \hat{g} следующим образом:

$$\hat{f} = \hat{F} - \bar{F}, \quad \hat{g} = \hat{G} - \bar{G}.$$

В этом случае дисперсия операторов \hat{F} и \hat{G} может быть записана следующим образом:

$$\delta F = \overline{\hat{f}^2}, \quad \delta G = \overline{\hat{g}^2}.$$

Введем также оператор \hat{A} следующим образом:

$$\hat{A} = \hat{f} + (\xi_1 + i\xi_2)\hat{g},$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные действительные числа.



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Эрмитово сопряженный оператору \hat{A} оператор \hat{A}^\dagger принимает вид:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{f}^\dagger + (\xi_1 - i\xi_2)\hat{g}^\dagger = \hat{f} + (\xi_1 - i\xi_2)\hat{g},$$

поскольку предполагается, что f и g — физические величины, то есть

$$\hat{f}^\dagger = \hat{f}, \quad \hat{g}^\dagger = \hat{g}.$$

Нетрудно показать, что

$$[\hat{F}, \hat{G}] = [\hat{f} + \bar{F}, \hat{g} + \bar{G}] = [\hat{f}, \hat{g}], \quad (8.12)$$

поскольку число всегда коммутирует с оператором.

С физической точки зрения это понятно, поскольку при параллельном переносе координатной оси x дисперсия не меняется. Рассмотрим среднее значение произведения операторов \hat{A}^\dagger и \hat{A} :

$$\overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \langle \Psi | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \hat{A} \Psi | \hat{A} \Psi \rangle \geq 0,$$

поскольку

$$\langle \hat{A} \Psi | \hat{A} \Psi \rangle$$

есть скалярное произведение вектора с самим собой.

Воспользовавшись выражением оператора \hat{A} через \hat{f} и \hat{g} ? получим:

$$\begin{aligned} \overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} &= \overline{\hat{f}^2} + (\xi_1^2 + \xi_2^2)\overline{\hat{g}^2} + \xi_1(\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}) + i\xi_2(\overline{\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}}) = \\ &= \delta f + \delta g(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1(\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}) - \xi_2\bar{\hat{C}}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где

$$i\hat{C} = [\hat{f}, \hat{g}].$$

Выражение (8.13), очевидно, должно быть неотрицательным. Для того, чтобы получить условие, при котором квадратичная форма будет неотрицательна, выделим в (8.13) полный квадрат:

$$\overline{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \delta f + \left(\xi_1 \sqrt{\delta g} + \frac{\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}}{2\sqrt{\delta g}} \right)^2 - \frac{(\overline{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}})^2}{4\delta g} + \left(\xi_2 \sqrt{\delta g} - \frac{\bar{\hat{C}}}{2\sqrt{\delta g}} \right)^2 - \frac{(\bar{\hat{C}})^2}{4\delta g} \geq 0.$$

Введем оператор:

$$\hat{[h]} = \frac{\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}}{2\sqrt{\delta g}\sqrt{\delta f}}.$$

В этом случае неравенство примет следующий вид:

$$\delta f(1 - \hat{[h]}^2) \geq \frac{(\bar{\hat{C}})^2}{4\delta g} \Rightarrow \delta f \delta g \geq \frac{[\hat{f}, \hat{g}]^2}{4(1 - \hat{[h]}^2)}. \quad (8.14)$$

Нетрудно показать, что

$$\hat{[h]}^2 \leq 1. \quad (8.15)$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

!

Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Для этого необходимо составить оператор \hat{B}

$$\hat{B} = \hat{f} + \xi_2 \hat{g}.$$

Затем нетрудно показать, что условие

$$\hat{B}^\dagger \hat{B} \geq 0$$

равносильно искомому условию (8.15).

Следовательно, неравенство (8.14) можно усилить следующим образом:

$$\delta f \delta g \geq \frac{[\widehat{[f, g]}]^2}{4}.$$

Величину $\widehat{[h]}$ принято называть **регрессией**. Рассмотрим ее физический смысл. Если бы физические величины f и g были независимы, то, согласно введенному определению,

$$\widehat{[h]} = 0.$$

Если же величины не независимы, то произведение операторов физических величин может оказаться не равным нулю. При переходе от классической механики к квантовой гамильтониан строится следующим образом: соответствующие классические физические величины заменяются на их операторы.

Если в классических величинах встречается произведение двух физических величин A и B , а операторы \hat{A} и \hat{B} , отвечающие этим величинам, не коммутируют, то переход к гамильтониану осуществляется следующим образом:

$$AB \rightarrow \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2},$$

поскольку в этом случае оператор в правой части — эрмитов.

Воспользовавшись этими рассуждениями легко показать, что оператор $\widehat{[h]}$ — эрмитов оператор. Выражение (8.14), согласно (8.12) и тому, что

$$\delta F = \delta f, \quad \delta G = \delta g$$

запишется следующим образом:

$$\delta F \delta G \geq \frac{[\widehat{[F, G]}]^2}{4}. \quad (8.16)$$

Пример 7 Соотношение неопределенностей между координатой и импульсом в соответствующем направлении легко получить из (8.16). Операторы \hat{p}_x и x не коммутируют

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] \neq 0.$$

!

Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Найдем этот коммутатор. Для этого подействуем этим коммутатором на вектор состояния $|\Psi\rangle$ в конфигурационном представлении:

$$|\Psi\rangle = \sum_x \psi(x) |x\rangle. \quad (8.17)$$

Получим, что

$$\begin{aligned} [\hat{p}_x, \hat{x}] |\Psi\rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\Psi) - \left(x(-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}) \right) = \\ &= -i\hbar \Psi - i\hbar x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar x \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\hbar \Psi \Rightarrow [\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar. \end{aligned} \quad (8.18)$$

От выбора представления результат действия коммутатора не зависит. В импульсном представлении (p -представлении):

$$\hat{p}_x = p_x, \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}.$$

Подействовав этим коммутатором на волновую функцию в p -представлении

$$|\Psi\rangle = \sum_p a(p) |p\rangle,$$

получим тот же результат, что и в (8.18).

Следовательно, соотношение неопределенностей (8.16) примет следующий вид:

$$\delta x \delta p = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (8.19)$$

*

В случае, когда операторы \hat{F} и G соответствуют операторам координаты и импульса, соотношение (8.19) надо понимать следующим образом.

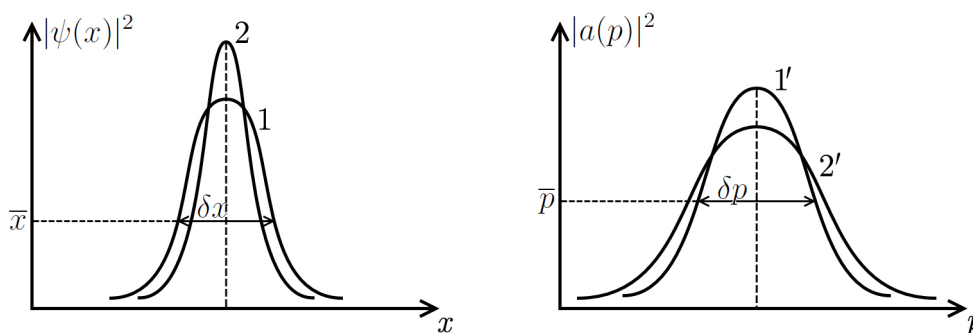


Рис. 8.2

Пусть распределение вероятности нахождения физической величины в некоторой точке пространства (в конфигурационном представлении) имеет некоторое среднее значение \bar{x} и дисперсию δx (см. рис. ??). Вероятность обнаружить частицу с некоторым импульсом (в импульсном представлении) (см. рис. ??) также имеет среднее значение \bar{p} и дисперсию δp .

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Если «сжимать» распределение в конфигурационном представлении ($1 \rightarrow 2$), то в импульсном представлении это распределение будет расширяться ($1' \rightarrow 2'$). Таким образом, соотношение неопределенности в случае, если две величины не коммутируют приводит к тому, что уменьшение разброса одной некоммутирующей величины приводит к увеличению разброса другой некоммутирующей величины.

По порядку величины всегда можно считать, что

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar.$$

3. Квантовый осциллятор

Задача о квантовом осцилляторе исторически имеет важное значение: изучая эту задачу, Гайзенберг открыл квантовую механику. Если частица находится в некотором потенциальном поле в равновесии, то состояние равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии.

Вблизи минимума отклонение всегда можно представить в виде квадратичной аппроксимации:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (8.20)$$

В классическом случае уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Потенциал (8.20) в этом случае удобно выразить следующим образом:

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Пусть есть некоторой параболический потенциал $V(x)$ (см. рис. 8.3). На прошлых лекциях были рассмотрены три случая движения частицы в зависимости от ее энергии по отношению к значениям потенциала V_1 и V_2 на бесконечности:

$$\begin{aligned} \text{I:} & \quad E > V_2 \geq V_1 \\ \text{II:} & \quad V_2 > E > V_1 \\ \text{III:} & \quad V_2 \geq V_1 > E \end{aligned}$$

При движении в параболической потенциальной яме реализуется случай III, то есть возможны только дискретные уровни энергии, поскольку значение потенциалов V_1 и V_2 стремится к $+\infty$ (см. рис. 8.4).

Уравнение Шредингера примет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi = E\Psi.$$

Существует правило, согласно которому при решении задач удобно пользоваться безразмерными переменными. Размерность энергии и импульса:

$$[E_0] = \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad [p_0] \simeq \sqrt{mE} = \sqrt{m\hbar\omega}. \quad (8.21)$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

11 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Следовательно, размерность координаты имеет следующий вид:

$$[x_0] = \left[\frac{\hbar}{p} \right] = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (8.22)$$

Если гамильтониан записан следующим образом (будем решать задачу в конфигурационном представлении):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2, \quad (8.23)$$

то удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{x}}{x_0}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{p_0}.$$

Гамильтониан (8.23) в этом случае примет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{m\hbar\omega}{2m} \hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \cdot \frac{\hbar}{m\omega} \hat{Q}^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2).$$

Поскольку гамильтониан имеет размерность энергии, то есть измеряется в $\hbar\omega$, можно записать:

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{H}_0, \quad \hat{H}_0 = \frac{1}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2).$$

В дальнейшем при решении уравнения необходимо учитывать, что экспоненциально растущее решение на обоих концах должно отсутствовать (см. рис. ??). Будем решать эту задачу не прямым интегрированием, а другим способом, который понадобится также в следующем семестре, когда будет рассмотрено излучение.

Будем искать решение уравнения

$$\hat{H}_0 |\Psi\rangle = \mathcal{E} |\Psi\rangle.$$

Введем два оператора:

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}}. \quad (8.24)$$

В классическом представлении, если \hat{Q} имеет размерность координаты, а \hat{P} — размерность импульса, то

$$a \sim e^{-i\omega t}, \quad a^\dagger \sim e^{i\omega t},$$

то есть будут соответствовать экспоненциально растущему и падающему решению.

Для операторов \hat{P} и \hat{Q} выполняется соотношение неопределенностей. Коммутатор этих операторов, согласно (8.21), (8.22) и (8.18), равен:

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = \frac{[\hat{p}_x, \hat{x}]}{\sqrt{m\hbar\omega} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} = \frac{[\hat{p}_x, \hat{x}]}{\hbar} = -\frac{i\hbar}{\hbar} = -i.$$

Произведение операторов, согласно (8.24), примет следующий вид:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q}^2 + \hat{P}^2 + i[\hat{P}, \hat{Q}]}{2} = \frac{1}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2 + 1). \quad (8.25)$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Переставив местами операторы \hat{a} и \hat{a}^\dagger , получим:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{\mathcal{Q}}^2 + i[\hat{\mathcal{Q}}, \hat{\mathcal{P}}]}{2} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{\mathcal{Q}}^2 - 1) \quad (8.26)$$

Вычтя из (8.25) выражение (8.26), получим значение коммутатора операторов \hat{a} и \hat{a}^\dagger :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1.$$

Из этих соотношений видно, что безразмерный гамильтониан \hat{H}_0 может быть записан в следующем виде:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{\mathcal{Q}}^2) = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}.$$

Для нахождения среднего значения оператора

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

будем искать решение следующего уравнения:

$$\hat{N} |\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle.$$

Умножив левую и правую его часть на $\langle\Psi|$, получим, что:

$$\langle\Psi| \hat{N} |\Psi\rangle = \lambda \langle\Psi| \Psi\rangle \geq 0,$$

так как $\langle\Psi| \Psi\rangle$ — скалярное произведение вектора состояния на самого себя.

На следующей лекции продолжим это рассуждение и увидим, что можно, не решая уравнения Шредингера, получить спектр энергий и, следовательно, волновые функции осциллятора.

Такое рассмотрение важно, поскольку в дальнейшем при рассмотрении осцилляторов в электромагнитном поле, действие оператора \hat{a}^\dagger на систему будет соответствовать рождению фотона. Действие оператора \hat{a} на систему будет соответствовать поглощению фотона, а оператор \hat{N} будет соответствовать среднему числу фотонов.

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

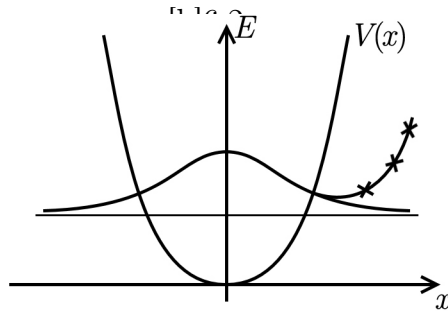


Рис. 8.3

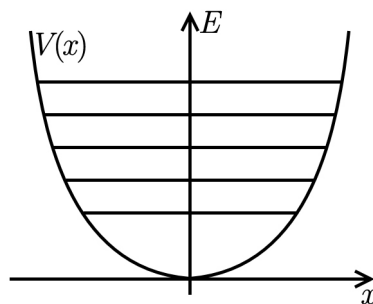


Рис. 8.4

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu