ЛЕКЦИЯ 5

НЕИДЕАЛЬНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

В этой и последующих лекциях будут рассматриваться неидеальные газы, у которых есть аномальные свойства: **сверхтекучесть** и **сверхпроводимость**. Представители квантовых газов — это ферми-газ и бозе-газ, и сначала будет рассмотрен бозе-газ, поскольку это более простой случай.

Если газ — идеальный, то в нём есть бозе-конденсация. Казалось бы, если вещество неидеально, то в нём должно быть больше релаксационных процессов. Но оказывается, что в случае с бозе-газом всё в точности наоборот: при низких температурах бозе-газ теряет вязкие свойства и становится сверхтекучим. Если есть поток газа, отличный от нуля, то этот поток не затухает, пока есть сверхтекучесть.

Это явление было впервые обнаружено в ^{4}He Капицей и его аспирантом. В их эксперименте использовался крутильный маятник, и было видно, что несверхтекучая составляющая жидкости вращалась вместе с маятником, а сверхтекучая не вращалась. Сверхтекучая жидкость — это «вещь в себе», её можно описывать только с помощью феноменологических соотношений по термодинамике Ландау, но это выходит за рамки учебной программы, так что ограничимся газами.

Сверхтекучесть неидеальных газов была открыта в конце Второй мировой войны Боголюбовым. Тогда она рассматривалась как модельный пример для объяснения сверхтекучести в ^{4}He. Сверхтекучесть газов была умозрительной концепций до 1995 года, когда появилась возможность с помощью лазеров охлаждать газ в магнитных ловушках до температуры 10^{-6} K.

Если в бозе-газе есть взаимодействие, то это взаимодействие должно быть отталкиванием, потому что в случае притяжения молекулы станут образовывать связи, и вместо газа будет жидкость. При низких температурах сверхтекучесть наблюдается только тогда, когда газ состоит из отталкивающихся молекул.

Для того чтобы вычислить, какие свойства неидеального бозе-газа порождают его сверхтекучесть, необходимо записать его гамильтониан.

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int d^3r_1\, d^3r_2\, \rho(r_1)\, U(r_1 - r_2)\, \rho(r_2), \tag{5.1}$$

где $U(r_1-r_2)$ — парное взаимодействие частиц в точках r_1 и r_2, $\rho(r)$ — плотность частиц в точке r.

Газ является почти однородным, искомые движения отличаются низкими скоростями. Поскольку это нейтральный газ, то взаимодействие спадает на расстояниях порядка межатомных. Поэтому

$$U(r_1-r_2) = U_0\delta(\vec{[h]}_1 - \vec{[h]}_2). \tag{5.2}$$

Такого вида парного взаимодействия достаточно, чтобы описать всю физику этого газа, поскольку для объяснения сверхтекучести интересны только длинноволновые возбуждения.

$$H_{\text{int}} = \frac{U_0}{2}\int d^3r_1\rho(r_1)\rho(r_1) = \frac{U_0}{2}\int d^3r_1\hat{\Psi}^+(r_1)\hat{\Psi}^+(r_1)\hat{\Psi}(r_1)\hat{\Psi}(r_1). \tag{5.3}$$

Вследствие однородности газа интеграл по r_1 можно заменить на полный объём V.

$$H_{\text{int}} = \frac{U_0}{2}V\hat{\Psi}^+(r)\hat{\Psi}^+(r)\hat{\Psi}(r)\hat{\Psi}(r). \tag{5.4}$$

Как известно, если газ идеальный, то часть частиц ниже температуры T_{c} (точки конденсации) будут находиться в конденсате. При $T=0$ все частицы будут в конденсате.

$$N_0 = N\left(1-\left(\frac{T}{T_{\text{c}}}\right)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{5.5}$$

Полный гамильтониан единичного объёма:

$$H = \Psi^+\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)\Psi + \frac{U_0}{2}\hat{\Psi}^+(r)\hat{\Psi}^+(r)\hat{\Psi}(r)\hat{\Psi}(r). \tag{5.6}$$

Напоминаем, что при вторичном квантовании нужно записывать гамильтониан в нормальном порядке, то есть слева должны стоять операторы рождения, а справа — операторы поглощения. Это было важно при рассмотрении газа из ферми-частиц, поскольку порядок операторов определял знак выражения. Здесь же это не важно, так как операторы коммутируют:

$$[\hat{\Psi}(r_1), \hat{\Psi}^+(r_2)] = \delta(r_1-r_2). \tag{5.7}$$

Далее в тексте шляпки у операторов поглощения и рождения для простоты будут опускаться.

Положим $T=0$. В идеальном газе в этом случае почти все частицы будут иметь импульсы, равные нулю, но в неидеальном газе из-за отталкивания их небольшая часть будет оставаться в возбуждённом состоянии. Поскольку это бозе-газ, то таких частиц мало, и в гамильтониане (5.6) можно пренебречь слагаемым $\dfrac{p^2}{2m}$. Полное число частиц: $N = \int d^3r\Psi^+\Psi$.

$$E_0 = -\mu N_0 + \frac{1}{2}U_0N_0^2. \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial N} \approx \frac{\partial E_0}{\partial N_0} = -\mu + U_0N_0 = 0, \tag{5.9}$$

поскольку в равновесии основное состояние обладает минимальной энергией. Отсюда

$$\mu = U_0 N_0. \tag{5.10}$$

Таким образом, величина, бывшая в (5.6) просто параметром, приобретает физический смысл. В основном состоянии химический потенциал оказывается отличным от нуля и положительным. Это ещё одна принципиальная разница между идеальным и неидеальным бозе-газами. Так как химический потенциал — это энергия в расчёте на одну частицу, то (5.10) показывает, что эта энергия тем больше, чем больше взаимодействие и число частиц.

Запишем уравнение Шрёдингера во вторичном квантовании:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\Psi, H], \tag{5.11}$$

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\Psi + U_0 \Psi^+ \Psi \Psi. \tag{5.12}$$

Видим, что если нет взаимодействия, это уравнение для идеального газа, а с учётом отталкивания появляется слагаемое $U_0 \Psi^+ \Psi \Psi = U_0 N \Psi$.

Чтобы получить свойства этого газа при низких температурах, необходимо перейти к импульсному представлению.

$$\hat{\Psi}(r) = \int \quad d^3k \, \hat{a}_k \, \mathrm{e}^{i\vec{k}[h]} \tag{5.13}$$

Воспользуемся тем, что $\hat{a}_k^+ \hat{a}_k = n_k$. Переход к импульсному выражению в (5.12) почти тривиален, потому что почти все частицы находятся в конденсате. Для начала запишем, что $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$. Тогда

$$i\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\Psi_1 + U_0\left(2\Psi_0^2\Psi_1 + \Psi_1^+\Psi_0^2\right). \tag{5.14}$$

$$i\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\Psi_1 + 2\mu\Psi_1 + \mu\Psi_1^+. \tag{5.15}$$

Это уже линейное уравнение, которое можно легко решить. Предварительно введём обозначение $\xi\Psi_1 \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{p^2}{2m} + \mu\right)\Psi_1$.

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \xi\Psi + \mu\Psi^+. \tag{5.16}$$

Далее либо будем рассматривать возбуждение только одной частицы, либо произведём преобразование Фурье и запишем уравнение (5.16) для одного импульса, используя (5.13).

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t} a_p = \xi a_p + \mu a_{-p}^+.} \tag{5.17}$$

Это линейное уравнение Шрёдингера в импульсном представлении. Разложение по импульсам в ряд Фурье содержит $-p$, поскольку поглощение частицы из среды с импульсом p эквивалентно рождению частицы с импульсом $-p$.

Лирическое отступление. Первым из сверхтекучих бозе-газов был получен газ рубидия при температуре $\sim 10^{-6}$ К. Чаще всего в рамках данной задачи говорят именно об этом веществе. Такие низкие температуры нужны, чтобы явление конденсации наступало в разреженном газе. Если же газ находится при своём обычном давлении, то $T_\text{c} \sim 2$ К.

Напоминаем, что $\xi = \dfrac{p^2}{2m} + \mu$. Волновые функции бозе-частиц не являются собственными функциями этого уравнения. Можно интерпретировать уравнение (5.17) так: одна частица с импульсом p поглотилась, а вторая частица вылетела из бозе-конденсата с противоположным импульсом. a_p — квазичастица и не является элементарным возбуждением, то есть это не фиксированное возбуждение с множителем $\mathrm{e}^{i(pr-\omega t)}$ в волновой функции. Боголюбов предложил искать решение уравнения (5.17) в виде

$$\hat{a}_p = u\hat{b}_p - v\hat{b}^+_{-p}. \tag{5.18}$$

Это преобразование называется **каноническим преобразованием**. Как известно, в квантовой механике каноническое преобразование заключается в переходе от одного представления к другому в рамках одного и того же гамильтониана (например, переход от координатного представления к импульсному). b_p по смыслу есть амплитуда частицы с импульсом p. Предполагается, что функции u и v являются чётными и действительными функциями от импульса.

Также напомним, что в квантовой механике частицы и поля являются тождественными понятиями, то есть каждая субстанция материи есть одновременно и частица, и поле. При одних экспериментах эта субстанция проявляет себя как частица, при других — как поле. Например, свет чаще всего рассматривается как электромагнитное поле. Но когда в приборе квантов света очень мало, можно наблюдать поглощение отдельных фотонов, и тогда их удобно представлять как частицы. Это два разных языка описания одних и тех же явлений. В физике принято субстанции с массой покоя, отличной от нуля, называть частицами, а с нулевой массой — полями. Поэтому фотоны и фононы называются полями, а электроны, мезоны и барионы — частицами.

Каноническое преобразование Боголюбова производится с целью сделать уравнение диагональным, то есть сделать так, чтобы в правой части (5.17) был только оператор поглощения или только оператор рождения.

Нужно потребовать, чтобы элементарный оператор $\hat{b}$ был квазичастицей. То есть квантовое число, отвечающее производной по времени, должно иметь смысл энергии этой квазичастицы:

$$i\frac{\partial\hat{b}_p}{\partial t} = \epsilon_p\hat{b}_p. \tag{5.19}$$

Это математический приём, который позволяет легко переходить от волнового представления к корпускулярному.

Гамильтониан системы этих частиц должен иметь вид

$$H = \sum \epsilon_p b^+_p b_p + E_0. \tag{5.20}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}b^+_{-p} = -\epsilon_{-p}b^+_{-p}. \tag{5.21}$$

Комбинация $b^+_p b_p$ должна иметь смысл количества этих квазичастиц. Для этого нужно, чтобы $[\hat{b}_p, \hat{b}^+_{p'}] = \delta_{p\,p'}$ (нормировка операторов $\hat{b}$).

Учитывая, что также $[\hat{a}_p, \hat{a}^+_{p'}] = \delta_{p\,p'}$, и подставляя (5.18) в этот коммутатор, получаем, что

$$u^2 - v^2 = 1. \tag{5.22}$$

Итак, подставляем преобразование (5.18) в уравнение (5.17):

$$\epsilon_p\left(ub_p + vb^+_{-p}\right) = \xi\left(ub_p - vb^+_{-p}\right) + \mu\left(ub^+_{-p} - vb_p\right). \tag{5.23}$$

$$\text{\textit{Коэффициенты при} } \hat{b}_p : \qquad \epsilon_p u = \xi u - \mu v. \tag{5.24}$$

$$\text{\textit{Коэффициенты при} } \hat{b}^+_{-p} : \qquad \epsilon_p v = -\xi v + \mu u. \tag{5.25}$$

$$\begin{cases} (\epsilon - \xi)u = -\mu v, \\ (\epsilon + \xi)v = \mu u. \end{cases}$$

Перемножим уравнения этой системы уравнений:

$$\epsilon^2 - \xi^2 = -\mu^2, \tag{5.26}$$

$$\epsilon_p = \sqrt{\xi^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \mu\right)^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{\mu}{m}p^2}. \tag{5.27}$$

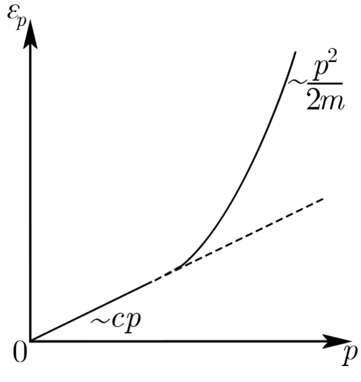

Рис. 5.1

График спектра возбуждений в неидеальном бозе-газе изображён на рис. 5.1. Если химический потенциал мал по сравнению со слагаемым $\frac{p^2}{2m}$, то неидеальностью газа можно пренебречь, и энергетический спектр имеет вид параболы. Если же импульс достаточно мал, то есть если $\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 < \frac{\mu}{m}p^2$, или $\frac{p^2}{4m} < \mu$, то имеет место линейная зависимость $\epsilon = cp$, где $c = \dfrac{\mu}{m}$. Зная E_0, можно вычислить давление p, затем скорость звука $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}$. Это будет сделано на семинаре. Проделав это, можно убедиться, что коэффициент c, получившийся из микроскопических соображений, равен скорости звука. Получаем, что элементарные возбуждения неидеального бозе-газа при низких температурах распространяются в этой среде со скоростью звука.

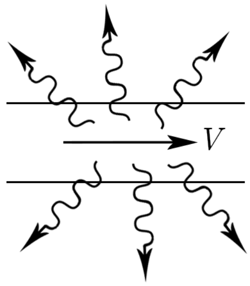

Рис. 5.2

Итак, если p мал, то $\epsilon = cp$. Пусть бозе-газ движется в трубе со скоростью V (рис. 5.2). Тогда при переходе к другой системе координат $\epsilon' = cp - pV$. Если $c < V$, то $\epsilon' < 0$, и возбуждения происходят самопроизвольно. Система начинает через стенки пускать свои возбуждения, поскольку их энергия отрицательна. Через некоторое время скорость газа станет меньше, чем c, появится сверхтекучесть, и затухание исчезнет.

Вычислим выражение $<\hat{a}_p \hat{a}_{-p}>$ — среднее для поглощения сразу двух бозе-частиц. Если бы это были элементарные возбуждения, то вероятность поглощения сразу двух частиц была бы равна нулю. Но если подставить сюда преобразования Боголюбова, можно увидеть, что эта величина не равна нулю. То есть, есть т. н. аномальное среднее. Его наличие указывает на наличие в системе бозе-конденсации. То же самое получится, когда будет рассматриваться сверхпроводимость.

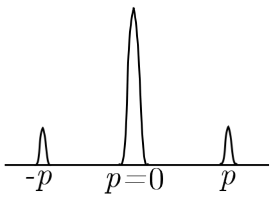

Рис. 5.3

Эксперименты показывают, что при низких температурах в бозе-газе возбуждения, распространяющиеся со скоростью звука, действительно присутствуют. Но если искусственным образом возбудить одну элементарную частицу с импульсом p, то можно увидеть, что появились ещё два возбуждения с p и $-p$. Высоты этих пиков пропорциональны u и v, то есть, измеряя их высоты, можно непосредственно получить величины u и v.

На следующей лекции будет рассматриваться явление сверхпроводимости.