ЛЕКЦИЯ 7

СВЕРХПРОВОДНИКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ЭФФЕКТ МЕЙСНЕРА

На прошлой лекции рассматривалась сверхпроводимость, и было показано, что если использовать метод преобразований Боголюбова, можно получить энергетический спектр со щелью, из которого следует, что этот газ является сверхтекучим. Поскольку электроны несут электрический заряд, то на эксперименте это проявляется как сверхпроводимость.

Напомним результаты прошлой лекции. Преобразование Боголюбова, приводящее к диагонализации:

$$\hat{a}_{\sigma p} = u_p \hat{b}_{p\sigma} - \sigma v_p \hat{b}_{-p-\sigma}. \tag{7.1}$$

Здесь u и v — параметры преобразования, играющие роль синуса и косинуса угла поворота и удовлетворяющие условию

$$u^2 + v^2 = 1. \tag{7.2}$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\epsilon}\right)}, \qquad v = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\epsilon}\right)}, \tag{7.3}$$

где ξ — кинетическая энергия, отсчитанная от химического потенциала, а ϵ — спектр с учётом возникновения щели.

$$\xi = \frac{p^2}{2m} - \mu, \tag{7.4}$$

$$\epsilon = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}. \tag{7.5}$$

Будем считать, что всё это известно с прошлой лекции, и соответствующие выкладки проведены на семинаре. В спектре вместо параболы, пересекающей ось абсцисс при $|p| = p_{\mathrm{F}}$ возникает спектр со щелью, поскольку энергия возбуждений всегда положительна, минимальная энергия равна Δ.

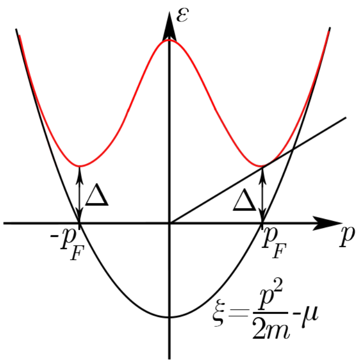

Рис. 7.1

Критерий Ландау гласит, что сверхпроводимость существует тогда, когда в подвижной системе координат энергия возбуждения $\tilde{\epsilon} = \epsilon_p - \vec{p}\vec{V}$ всегда является положительной. Иными словами, максимальная скорость, при которой сверхпроводимость не теряется, равна $\dfrac{\Delta}{p_{\text{F}}}$. Значение V определяет наклон прямой на рисунке 7.1.

Главное свойство сверхпроводников заключается в том, что в них *ток течёт без сопротивления*, если ток достаточно мал. $j = eNV$, так что $j_{\max} = eNV_{\max}$. Второе важное свойство — **эффект Мейснера**, явление выталкивание магнитного поля из сверхпроводника.

Чтобы математически получить эффект Мейснера, нужно перейти к обобщённому случаю, когда в системе присутствует магнитное поле. Можно было бы ввести и электрическое поле, но оно приводит к тому, что при отсутствии электрического сопротивления электроны начнут двигаться всё быстрее и быстрее, пока сверхпроводимость не будет разрушена при достижении максимально возможного тока. Поэтому, чтобы не рассматривать нестационарные явления, ограничимся магнитным полем.

Как обычно, будем считать, что $\hbar = 1$, чтобы упростить вычисления. Запишем гамильтониан системы.

$$H = \int d^3r \left[\hat{\Psi}^+_\sigma \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} A_0 \right)^2 \hat{\Psi}_\sigma + \frac{1}{2} U_0 \hat{\Psi}^+_\sigma \hat{\Psi}^+_\sigma \hat{\Psi}^+_{-\sigma} \hat{\Psi}_{-\sigma} \hat{\Psi}_\sigma \right], \tag{7.6}$$

где $-\dfrac{e}{c}\vec{A}_0 = -\dfrac{e}{c}\vec{A} + \hbar\nabla\chi$, $B = \operatorname{rot} A$, $\nabla\chi$ — градиент фазы $\hat{\Psi}_\sigma$.

$U_0 < 0$, поэтому взаимодействие электронов является притяжением. $\vec{A}$ — векторный потенциал, $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$.

Общепринятым является проведение градиентного преобразования, тогда гамильтониан принимает наиболее удобный вид. Будем считать, что это преобразование с самого начала сделано, так что остаётся только немного улучшить выражение (7.6). В слабом магнитном поле можно принять линейное приближение и отбросить член, содержащий A^2. Тогда

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \vec{v}_s \hat{\vec{P}}, \tag{7.7}$$

где H_0 — гамильтониан при отсутствии магнитного поля, $\hat{\vec{P}} = \int d^3r\, \hat{\Psi}^+_\sigma \hat{p} \hat{\Psi}_\sigma$ — полный импульс электронов, и введено обозначение

$$\vec{v}_{\rm s} = -\frac{e}{mc}A_0 = -\frac{e}{mc}\left(A - \frac{c}{e}\nabla\chi\right). \tag{7.8}$$

На прошлой лекции было показано, что с помощью преобразования Боголюбова гамильтониан H_0 принимает диагональный вид

$$H_0 = E_0 + \sum_{p\,\sigma} \epsilon_p b^+_{p\sigma} b_{p\sigma}. \tag{7.9}$$

Разложим волновую функцию электронов по плоским волнам:

$$\hat{\Psi} = \sum \frac{1}{\sqrt{V}} \mathrm{e}^{i\vec{k}[h]}\, \hat{a}_k. \tag{7.10}$$

Антикоммутатор $\hat{a}_k$, поскольку электроны являются ферми-частицами, удовлетворяет выражению

$$\{\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}\} = \delta_{kk'}. \tag{7.11}$$

Таким образом,

$$H = E_0 + \sum_{p\,\sigma} \epsilon_p b^+_{p\sigma} b_{p\sigma} + \vec{v}_{\rm s}\vec{P}, \tag{7.12}$$

где E_0 — некая константа, не представляющая интереса. Выражение $\sum\limits_{k,\,\sigma} \hat{a}^+_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma}\vec{k}$ — это полный импульс электронов, который не зависит от представления (в терминах операторов $\hat{a}$ или $\hat{b}$). Поэтому гамильтониан неидеального ферми-газа в магнитном поле можно написать в виде

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{k,\,\sigma} \epsilon_k \hat{b}^+_{k\sigma}\hat{b}_{k\sigma} + \vec{v}_{\rm s}\sum_{k,\,\sigma} \vec{k}\hat{b}^+_{k\sigma}\hat{b}_{k\sigma}, \tag{7.13}$$

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{k,\,\sigma} (\epsilon_k + \vec{v}_{\rm s}\vec{k})\hat{b}^+_{k\sigma}\hat{b}_{k\sigma}. \tag{7.14}$$

$$\boxed{\tilde{\epsilon} = \epsilon_k + \vec{v}_{\rm s}\vec{k}.} \tag{7.15}$$

Выражение перед (7.15) имеет вид гамильтониана идеального ферми-газа, но со спектром, имеющим щель. Заметим, что перехода в подвижную систему координат не производилось, тем не менее, энергия возбуждения зависит от добавки, как будто был совершён переход в систему координат, движущуюся со скоростью $\vec{v}_{\rm s}$.

Из выражения (7.15) видно, что если поле достаточно велико, и $|\vec{v}_s| > V_{\rm max}$, то сверхпроводимость исчезнет. Существует максимально допустимое в условиях сверхпроводимости внешнее магнитное поле.

Выражение для тока в магнитном поле изменяется:

$$\vec{j} = e\vec{v}n = \frac{e}{m}\Re\left\langle \Psi^+\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\Psi\right\rangle = e\left(\vec{v}_{\rm s}\sum_{p\,\sigma}\hat{a}^+_{p\sigma}\hat{a}_{p\sigma} + \sum_{p\,\sigma}\frac{p}{m}\hat{a}^+_{p\sigma}\hat{a}_{p\sigma}\right). \tag{7.16}$$

Как уже говорилось, $\sum\limits_{k,\,\sigma} \hat{a}^+_{k\sigma}\hat{a}_{k\sigma}\vec{k}$ — полный импульс системы, и его можно обозначить как $\vec{P}$.

$$\vec{j} = e\vec{v}_s N_e + \frac{e}{m}\vec{P}. \tag{7.17}$$

Таким образом, даже при $T = 0$, когда возбуждений нет, а полный импульс системы равен нулю, в основном состоянии $j = e\vec{v}_s N_e$, где $\vec{v}_s$ определяется выражением (7.8). Если $T > 0$, появляется импульс, который несут квазичастицы. Квазичастицы уменьшают нулевой сверхпроводящий ток, так что второй член в (7.17) противоположного знака. Тогда

$$\vec{j} = e\vec{v}_s N_s = -\frac{e^2}{mc} N_s \left(\vec{A} - \frac{c}{e}\nabla\chi\right), \tag{7.18}$$

где N_s — эффективное количество сверхпроводящих электронов.

Чтобы получить эффект Мейснера, нужно поставить ток (7.18) в уравнения Максвелла. Единственное нетривиальное уравнение Максвелла в данном случае:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} N_s \left(\vec{A} - \frac{c}{e}\nabla\chi\right). \tag{7.19}$$

Т. к. $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_0 = \operatorname{rot}\vec{A}$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot} B = -\Delta B$. Получаем, что

$$\Delta\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}, \tag{7.20}$$

где

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} N_s. \tag{7.21}$$

Уравнение (7.20) называется **уравнением Лондонов**. Теория Лондонов — это первое феноменологическое описание сверхпроводимости, в которой авторы постулировали, что электроны движутся без сопротивления. Усовершенствованный вариант этой теории — теория Гинзбурга–Ландау, речь о которой будет идти немного позже.

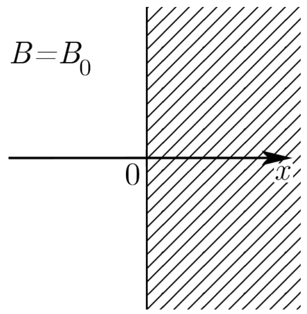

Рис. 7.2

Пусть плоскость $x = 0$ определяет границу сверхпроводника (рис. 7.2). Значение магнитного поля на поверхности $B = B_0$. Тогда

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2}B. \tag{7.22}$$

Решение этого уравнения: $B = B_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}$. Под знаком экспоненты, разумеется, знак «−», потому что при знаке «+» решение будет бесконечно расти, что бессмысленно.

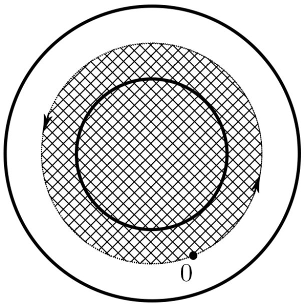

Рис. 7.3

Итак, согласно (7.22) внешнее поле B_0 экспоненциально затухает при движении вглубь сверхпроводника. Это и есть **эффект Мейснера**.

Из (7.18) вытекает одно важное следствие. Возьмём замкнутую сверхпроводящую трубку (рис. 7.3) и будем следить за равенством (7.18) в точке на оси тора. Если толщина тора $\Delta R \ll \lambda$, то внутрь трубки магнитное поле не проникает, и ток на внутренней поверхности равен нулю:

$$0 = -\frac{e}{c}A + \nabla\chi. \tag{7.23}$$

Интегрируем это уравнение по окружности внутри тора.

$$0 = -\frac{e}{c}\int A\,dl + \int dl\,\nabla\chi. \tag{7.24}$$

Первое слагаемое равно потоку магнитного поля Φ через площадь, ограниченную выбранной окружностью: $\int A\,dl = \int B\,dS = \Phi$. Второе слагаемое: $\int dl\,\nabla\chi = \int dl\frac{d\chi}{dl} = \chi\big|_0^1$. Точка 1 совпадает с точкой 0, но с учётом того, что был сделан оборот 2π. Строго говоря, нужно интегрировать не один раз, а два: из свойств электрона известно, что при повороте 2π фаза меняется на π. В итоге

$$\Phi = \Phi_0 \cdot q, \tag{7.25}$$

где q — целое число, а $\Phi_0 = \dfrac{\pi\hbar c}{e} \approx 10^{-7}$ Эрстед.

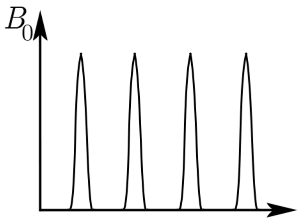

Рис. 7.4

Если измерять магнитное поле внутри сверхпроводника, то $\Phi = B_0 S$, и видно, что поле либо не проникает вглубь сверхпроводящего вещества, либо оно имеет вид, показанный на рис. 7.4. Чтобы измерить магнитное поле внутри этого вещества, делают маленькую щель в торе. Казалось бы, если проделать такую щель, то ток сверхпроводимости пропадёт. Но в действительности это не так. Параметр λ — это глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В теории Гинзбурга – Ландау есть второй параметр длины — ξ. Он означает, что волновая функция падает не сразу, а на расстоянии порядка ξ. Если $\xi \ll \lambda$, то говорят, что это сверхпроводник второго рода, если $\xi \gg \lambda$, то это сверхпроводник первого рода. В сверхпроводнике второго рода в щели шириной $a \ll \xi$ волновая функция проходит сквозь эту щель, и исчезновения тока не происходит. Это называется **эффектом Джозефсона**.

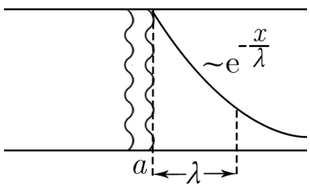

Рис. 7.5

Теперь рассмотрим теорию Гинзбурга – Ландау. В лекции 3 уже рассматривалась теория фазовых переходов второго рода Ландау. Согласно этой теории, имеются группы веществ, в которых фазовый переход не сопровождается выделением тепла, имеется только скачок теплоёмкости. На примере ферромагнетиков было показано, что в точке Кюри происходит именно такой фазовый переход. Также теория фазовых переходов второго рода Ландау утверждает, что при таком переходе некоторая величина, называемая **параметром дальнего порядка**, выше температуры фазового перехода равна нулю, а ниже — отлична от нуля. Название «параметр дальнего порядка» связано с тем, что он сохраняет своё значение во всём образце, т. е. не затухает. Корреляционная длина в данном случае равна бесконечности.

Например, в ферромагнетике при $T < T_\text{C}$ есть спонтанный магнитный момент M, который может быть отличным от нуля во всём образце, а выше T_C спонтанный момент отсутствует. Из теории было получено два результата: во-первых, в точке Кюри происходит скачок теплоёмкости, во-вторых, магнитная восприимчивость имеет пик при $T = T_\text{C}$.

Перейдём непосредственно к теории Гинзбурга – Ландау. Что такое параметр порядка в случае сверхпроводника? Сверхпроводящего состояние отличается от нормального тем, что в нём есть аномальное среднее $<\Psi\Psi> \sim \Delta$. Выше температуры фазового перехода $\Delta = 0$, а ниже — отлична от нуля.

Из формулы (7.21) следует, что число сверхпроводящих электронов N_s является параметром дальнего порядка. $N_\text{s} > 0$ в сверхпроводящей фазе, и $N_\text{s} = 0$ в противном случае. Но в рамках квантовой механики лучше говорить не о N_s, а о величине $\Psi^*\Psi$.

Параметром порядка в теории Гинзбурга – Ландау называется волновая функция куперовских пар с удвоенным зарядом и удвоенной массой. Вся теория работает вблизи критической температуры, когда параметр порядка мал, $T \cong T_\text{c}$. В её рамках утверждается, что можно разложить свободную энергию тела на нулевой член, одинаковый и выше, и ниже критической температуры, и всё остальное:

$$F = F_0 + \int d^3r\{\Psi^* \frac{1}{2m_2}\left(\hat{p} - \frac{e_2}{c}\hat{A}\right)^2 \Psi\}. \tag{7.26}$$

Это термодинамическая теория, оперирующая не операторами волновых функций, а квазиклассическими волновыми функциями, и вместо Ψ^+ нужно писать Ψ^*. Формула (7.26) написана для идеального газа куперовских пар. Допишем её с учётом взаимодействия.

$$F = F_0 + \int d^3r \{\Psi^* \frac{1}{2m_2}\left(\hat{p} - \frac{e_2}{c}\hat{A}\right)^2 \Psi + a\Psi^*\Psi + \frac{1}{2}b(\Psi^*\Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}B^2\}. \tag{7.27}$$

В этом выражении B и Ψ — свободные параметры. Хотя поле B должно удовлетворять уравнениям Максвелла, сверхпроводящий ток с точки зрения теории Гинзбурга–Ландау пока неизвестен. Чтобы его узнать, нужно получить выражение для него из (7.27), накладывая условие $\frac{\delta F}{\delta B} = 0$: свободная энергия должна быть минимальной.

$$\delta F = \int d^3r \{\Psi^* \frac{1}{2m_2} 2\left(-\frac{e_2}{c}\left(\hat{p} - \frac{e_2}{c}A\right)\delta A\right)^2 \Psi + \frac{1}{4\pi} B\,\delta B\}, \tag{7.28}$$

Воспользуемся тем, что $\delta B = \operatorname{rot}\delta A$. В последнем члене под знаком интеграла стоит $\frac{1}{4\pi}B(\nabla \times \delta A)$. Запишем эту часть интеграла в тензорных обозначениях:

$$\int d^3r \frac{1}{4\pi} B_\alpha\, e_{\alpha\beta\gamma}\, \nabla_\beta\, \delta A_\gamma = \int d^3r\, \delta A_\gamma \frac{1}{4\pi} \nabla_\beta\, B_\alpha\, e_{\alpha\beta\gamma} = \int d^3r\, \delta A_\gamma \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} B)_\gamma. \tag{7.29}$$

$$\frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot} B) = \frac{e_2}{m_2 c}\Psi^*\left(\hat{p} - \frac{e_2}{c}A\right)\Psi. \tag{7.30}$$

Это не что иное, как уравнение Максвелла. В правой части как раз получается ток j.

Продолжение следует.