ЛЕКЦИЯ 9

ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

На прошлых лекциях рассматривались элементарные возбуждения в системах, которые находятся в термодинамическом равновесии. Например, когда изучались сверхтекучесть и сверхпроводимость, учитывалось взаимодействие между частицами в приближении среднего поля. Также фононы называются «элементарными возбуждениями».

Однако кроме т. н. элементарных возбуждений существуют **коллективные возбуждения**. Наиболее яркий представитель такого явления — **плазменные колебания**. Традиционно в общей физике изучается только горячая плазма, поскольку она представляет наибольший интерес с точки зрения создания термоядерной реакторов. С точки зрения физики твёрдого тела представляют интерес колебания холодного ферми-газа, то есть плазменные колебания в металле. Эти колебания и будут рассматриваться в данной лекции.

Поскольку кристаллическую структуру исследовать сложно, то для её представления используется модель, близкая к реальности — так называемая **модель желе**. В этой модели вместо кристаллической структуры и ионной подсистемы описывается непрерывная сплошная среда, которая имеет большую плотность и должна рассматриваться как жидкость. Кроме того, ту же плотность имеет и электронная подсистема. Поскольку фон является равномерным, то это свободный ферми-газ с взаимодействием. В итоге имеются две подсистемы, и их взаимодействие приводит к возбуждениям, которые называются **плазменными колебаниями**. Традиционно эти колебания ищутся как полюса электрической проницаемости, потому что элементарные возбуждения в плазме с точки зрения коллективного движения в плазме — это движения, возникающие при сколь угодно малом внешнем воздействии, то есть в случае резонанса.

Рассмотрим случай медленных колебаний, когда система близка к равновесию. Предметом дальнейшего изучения будут не высокочастотные оптические, а низкочастотные колебания. Запишем уравнение Максвелла:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho_{\text{tot}} = 4\pi\left(\rho_{\text{e}} + \rho_{\text{i}} + \rho_{\text{вн}}\right). \tag{9.1}$$

Здесь $\rho_{\text{вн}}$ — это возбуждения, не принадлежащие самой плазме, но создающие электрическое поле. Поскольку в равновесии выполняется свойство **электронейтральности**, то есть $\rho_{\text{e}}^{(0)} + \rho_{\text{i}}^{(0)} = 0$, то в (9.1) можно вместо самих величин можно написать отклонения этих величин:

$$\operatorname{div} E = 4\pi \left(\delta\rho_\text{e} + \delta\rho_\text{i} + \rho_\text{вн}\right). \tag{9.2}$$

Это микроскопическое уравнение Максвелла. Макроскопическое уравнение записывается так:

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho_\text{вн}. \tag{9.3}$$

Одно из другого можно получить, применяя равенство $D = E + 4\pi P$. В координатном представлении рассматривать задачу с малыми возбуждениями неудобно, поэтому перейдём к импульсному представлению и разложим все величины на плоские волны.

$$\rho_\text{вн} = \int \frac{d^3k\, d\omega}{(2\pi)^4}\phi(k,\omega)\, \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)}\,. \tag{9.4}$$

Любая величина, будучи записана в таком виде, будет иметь один и тот же множитель плоской волны и коэффициент суммирования по частотам и волновым векторам. Поскольку уравнение линейно, эти множители сократятся, и останется уравнение для величин типа $\phi(k,\omega)$.

Известно, что $\operatorname{div} E = -\nabla^2\phi$, $E = -\nabla\phi$. Поэтому $\operatorname{div} E = \nabla^2\phi$. Поскольку оператор набла действует на плоскую волну, $\nabla E = k^2\phi_{k,\omega}$. Вспомним также, что $D = \epsilon E$. С учётом вышесказанного, уравнения (9.2) и (9.3) превращаются в

$$k^2\phi = 4\pi(\delta\rho_\text{e} + \delta\rho_\text{i} + \rho_\text{вн}), \tag{9.5}$$

$$k^2\epsilon\phi = 4\pi\rho_\text{вн}. \tag{9.6}$$

Заметим, что поскольку возбуждения малы, то $\delta\rho_\text{e} = \pi_\text{e}\phi$, где π_e — некий коэффициент. То же самое относится и к ионной составляющей, коэффициент — π_i. Вычитаем (9.6) из (9.5):

$$k^2(\epsilon - 1)\phi = -4\pi(\pi_\text{e} + \pi_\text{i})\phi. \tag{9.7}$$

Коэффициенты π_e и π_i называются **поляризационными операторами**. В общем случае они являются операторами, а не просто числами, и это хорошо видно, если записать их в координатном представлении.

$$\boxed{\epsilon = 1 - \frac{4\pi}{k^2}(\pi_\text{e} + \pi_\text{i}).} \tag{9.8}$$

Итак, из (9.8) следует, что электрические свойства среды, которые зависят от диэлектрической проницаемости ϵ, выражаются через поляризационные операторы. Если найти их, то все свойства плазмы при низких частотах и малых возбуждениях станут известными.

Диэлектрическая проницаемость приобретает чёткий физический смысл, если записать, что

$$\phi = \frac{4\pi}{k^2\epsilon}\rho_\text{вн}. \tag{9.9}$$

Если $\epsilon = 0$, то бесконечно слабое внешнее воздействие приведёт к бесконечно большому отклику. Чтобы рассчитать плазменные колебания, нужно вычислить ϵ и точку, где она обращается в ноль.

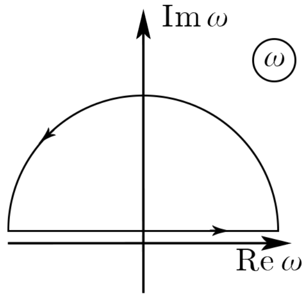

Рис. 9.1

При интегрировании по ω необходимо сказать, что либо при $t \to -\infty$ возбуждений не было, либо возбуждения начинаются при $t = 0$.

Во втором случае преобразование (9.4) с точки зрения интегрирования по ω называется преобразованием Лапласа, которое упоминалось в курсе теории функций комплексного переменного. В первом случае формулы остаются такими же, но нужно помнить, что для того чтобы внешнее возбуждение исчезало при $-\infty$, т. е. чтобы $\mathrm{e}^{-i\omega t} \to 0$, нужно, чтобы

$$\mathrm{e}^{(\tilde{\omega}+i\delta)t} = \mathrm{e}^{-i\tilde{\omega}t}\,\mathrm{e}^{\delta\cdot t}, \tag{9.10}$$

где было применено обозначение $\omega = \tilde{\omega} + i\delta$. Таким образом, в плоскости комплексных значений ω нужно интегрировать не по действительной оси, а по оси, отодвинутой на некоторую величину в область положительных $\Im\omega$ (рис. 9.1). Как следует из преобразования Лапласа, если все рассматриваемые функции являются аналитическими, то $\Im\omega > 0$. Это полезно, потому что, как будет видно из дальнейшего, все полюса будут располагаться на действительной оси, а если рассматривать все вычисления как предел при $\Im\omega \to +0$, то это означает, что интегралы должны браться по всей действительной оси кроме окрестностей полюсов, которые обходятся в верхней полуплоскости (рис. 9.2).

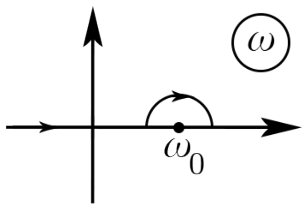

Рис. 9.2

Плазма состоит из двух компонент: ионов и электронов. В модели желе ионная подсистема является почти неподвижной жидкой субстанцией, а электронная подсистема является идеальным ферми-газом.

Сначала рассмотрим ионы. Главная характеристика системы — это $\omega\tau$, то есть частота, помноженная на время релаксации. При низких частотах $\omega\tau \ll 1$, и релаксация происходит гораздо быстрее, чем один период колебания системы. В этом случае можно использовать так называемое **гидродинамическое приближение**, заключающееся в том, что можно использовать уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \nabla j_{\mathrm{i}} = 0, \tag{9.11}$$

$$M\frac{dv_{\text{i}}}{dt} = e_{\text{i}}E = -e_{\text{i}}\nabla\phi. \tag{9.12}$$

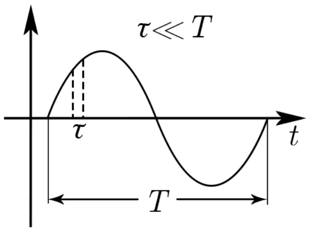

Рис. 9.3

Разделим уравнение (9.12) на массу и умножим на $e_{\text{i}}N_{\text{i}}$:

$$e_{\text{i}}N_{\text{i}}\frac{dv_{\text{i}}}{dt} = -\frac{e_{\text{i}}^2}{M}N_{\text{i}}\nabla\phi. \tag{9.13}$$

Поскольку отклонения от равновесия слабые, а скорость является величиной первого порядка по возбуждению, то N_{i} можно рассматривать в нулевом порядке приближения, то есть $N_{\text{i}} = N_{\text{i}}^{(0)}$. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}j_{\text{i}} = -\frac{e_{\text{i}}^2}{M}N_{\text{i}}\nabla\phi. \tag{9.14}$$

Выражение (9.14) называется **уравнением Эйлера**, если речь идёт о квазинейтральных средах. Продифференцируем (9.11) по t и подставим в него (9.14).

$$\frac{\partial^2\rho_{\text{i}}}{\partial t^2} + \nabla\left(\frac{e_{\text{i}}^2N_{\text{i}}}{M}\right)\nabla\phi = 0. \tag{9.15}$$

Поскольку ρ_{i} зависит от времени как $\text{e}^{i(kr-\omega t)}$, то $\dfrac{\partial^2\rho_{\text{i}}}{\partial t^2} = -\omega_{\text{i}}^2\rho_{\text{i}}$.

$$-\omega_{\text{i}}^2\rho_{\text{i}} + ik\left(-\frac{e_{\text{i}}^2N_{\text{i}}}{M}\right)ik\phi = 0, \tag{9.16}$$

$$\rho_{\text{i}} = \frac{k^2e_{\text{i}}^2N_{\text{i}}}{M\omega^2}\phi. \tag{9.17}$$

Итак, если задано ϕ (а оно задано согласно (9.9), поскольку известно $\rho_{\text{вн}}$), то известно и ρ_{i}. Следовательно,

$$\pi_{\text{i}} = \frac{N_{\text{i}}e_{\text{i}}^2}{M}\frac{k^2}{\omega^2}. \tag{9.18}$$

Теперь вычислим π_{e}. В отличие от ионов, электроны движутся быстро, $\omega\tau \gg 1$, поэтому гидродинамическим приближением пользоваться нельзя. В этом случае нужно рассматривать **бесстолкновительный предел**. Электронная подсистема находится в локальном термодинамическом равновесии. Запишем распределение Ферми.

$$N_{\text{e}} = \frac{1}{\text{e}^{\frac{1}{T}(\epsilon_k-\mu)}+1}. \tag{9.19}$$

Электронный газ находится в переменном электрическом поле в квазиравновесии, поэтому вместо ϵ_k в (9.19) нужно написать $\epsilon_k + e_{\mathrm{e}}\phi$.

$$N_{\mathrm{e}} = N_{\mathrm{e}}^{(0)}(\mu - e\phi) = N_{\mathrm{e}}^{(0)} - e\phi\frac{\partial N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\partial\mu}, \tag{9.20}$$

где $\mu - e\phi$ — электрохимический потенциал.

Известно, что $N_{\mathrm{e}}^{(0)} \sim \mu^{\frac{3}{2}}$. Поэтому

$$\frac{\partial N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\partial\mu} = -\frac{3}{2}\frac{N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\mu}. \tag{9.21}$$

Таким образом,

$$\delta\rho_{\mathrm{e}} = e\delta N_{\mathrm{e}} = -e^2\phi\frac{N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\mu}, \tag{9.22}$$

$$\pi_{\mathrm{e}} = -e^2\frac{\partial N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\partial\mu}. \tag{9.23}$$

Заметим, что $\pi_{\mathrm{i}} > 0$, тогда как $\pi_{\mathrm{e}} < 0$. Это следствие электронейтральности.

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi}{k^2}(\pi_{\mathrm{i}} + \pi_{\mathrm{e}}) = 1 - \frac{4\pi}{k^2}\left(-e^2\frac{\partial N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\partial\mu}\pi_{\mathrm{i}}\right) - \frac{4\pi}{k^2}\frac{N_{\mathrm{i}}e_{\mathrm{i}}^2}{M}\frac{k^2}{\omega^2}. \tag{9.24}$$

$$\boxed{\epsilon = 1 + \frac{\kappa^2}{k^2} - \frac{\Omega_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2},} \tag{9.25}$$

где $\kappa^2 = 4\pi e^2\frac{\partial N_{\mathrm{e}}^{(0)}}{\partial\mu}$, $\Omega^2 = 4\pi\frac{N_{\mathrm{i}}e_{\mathrm{i}}^2}{M}$.

Возьмём высокую частоту, чтобы можно было пренебречь последним членом в (9.25). Тогда получим, что

$$\phi = \frac{4\pi}{k^2\left(1 + \frac{\kappa^2}{k^2}\right)}\rho_{\text{вн}}. \tag{9.26}$$

Итак, при $\omega \to \infty$

$$\phi_{k,\omega} = \frac{4\pi\rho_{\text{вн}}}{k^2 + \kappa^2}. \tag{9.27}$$

В координатном представлении, если $\kappa = 0$, то потенциал является кулоновским:

$$\phi = \frac{\rho_{\text{вн}}}{[}h]. \tag{9.28}$$

Если же $\kappa \neq 0$, то возникает **дебаевское экранирование**:

$$\phi = \frac{\rho_{\text{вн}}}{[}h]\,\mathrm{e}^{\kappa r}. \tag{9.29}$$

Строго говоря, этот термин относится к случаю, когда электроны описываются распределением Максвелла. Тем не менее, он употребляется и в случае распределения Ферми.

Таким образом, благодаря действию электронной компоненты кулоновский потенциал оказывается экранированным, и взаимодействие пропадает на расстояниях порядка $\dfrac{1}{\kappa}$.

Возьмём обратный случай, когда $\omega \to 0$. Тогда членом $\dfrac{\kappa^2}{k^2}$ в (9.25) можно пренебречь, и

$$\epsilon = 1 - \frac{\Omega_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2}. \tag{9.30}$$

В точке $\omega = \Omega_{\mathrm{i}}$ ϵ обращается в бесконечность. В этой точке имеет место резонанс, когда сколь угодно слабое внешнее возбуждение приводит к бесконечно сильному отклику. Ω_{i} — это **плазменная частота** в пределе низких энергий, когда распределение электронов является фермиевским.

Наконец, рассмотрим промежуточный случай, когда пространственное и частотное слагаемые в (9.25) имеют одинаковый порядок величины. Чтобы найти резонанс, положим $\epsilon = 0$.

$$1 + \frac{\kappa^2}{k^2} = \frac{\Omega_{\mathrm{i}}^2}{\omega^2}, \tag{9.31}$$

$$\omega^2 = \Omega_{\mathrm{i}}^2 \frac{k^2}{k^2 + \kappa^2}. \tag{9.32}$$

В пределе, когда $k \ll \kappa$

$$\omega^2 = \Omega_{\mathrm{i}}^2 \frac{k^2}{\kappa^2}. \tag{9.33}$$

Получается, что в плазме уже нет щели $\omega = \Omega_{\mathrm{i}}$ при высоких частотах. При низких частотах и малых волновых числах имеет место звуковая зависимость между пространственными и временными величинами, то есть плазменные колебания в этом пределе являются продольными звуковыми колебаниями. Чтобы получить поперечные колебания, нужно было бы отказаться от модели желе и учесть поперечные колебания ионов.

Если же в (9.32) $k \gg \kappa$, то

$$\omega = \Omega_{\mathrm{i}}. \tag{9.34}$$

Таким образом, возбуждения в холодной плазме полностью описаны. Теперь рассмотрим горячую плазму. Скорее всего, это уже проходили в курсе общей физике. Но для полноты следует рассмотреть горячую плазму и затухание Ландау.

Горячая плазма описывается распределением Максвелла; колебаниями ионной подсистемы можно пренебречь. Она интересна тем, что имеется похожая проблема — колебания нейтрального ферми-газа ^{3}He. Там возникает т. н. теория ферми-жидкости Ландау. Для того чтобы её понять, нужно вспомнить процессы, происходящие в горячей плазме.

Столкновения рассматриваться не будут. Ещё в 30-х годах XX века были выведены уравнения Власова. Власов рассмотрел движения электронов как сплошной среды, полностью пренебрегая столкновениями в уравнении Больцмана. То есть, он писал только уравнение непрерывности для функции распределения $f(r, v, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f + \dot{\vec{p}}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{9.35}$$

Это уравнение Больцмана, когда нет столкновений. Власов заметил, что в левой части уравнения (9.35) в $\dot{\vec{p}} = e\vec{E}$ главную роль играет не внешнее электрическое поле, а внутреннее, то есть то, что создаётся окружающими электронами. Чтобы написать выражение для $\vec{E}_{\text{внутр}}$, нужно написать уравнение Максвелла для электрического поля в присутствии движения электронов:

$$\nabla E = 4\pi\left(e\left(m - n^{(0)}\right) + \rho_{\text{внешн}}\right), \tag{9.36}$$

$$n = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, [\vec{h}]). \tag{9.37}$$

Подставим (9.37) в (9.35), и получим уравнение на $f(\vec{p}, [\vec{h}])$, в котором взаимодействие с внешней средой введено в $\dot{\vec{p}}$. Чтобы сделать уравнение линейным, в $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial p}$ можно написать распределение Максвелла. Решение получающегося уравнения приводит к тому, что $\omega = \Omega_{\text{i}}$.

Рис. 9.4

Власов не получил затухания: поскольку в правой части уравнения (9.35) стоит 0, то это чистая динамика, и затухания быть не должно. Однако в его вычислениях была допущена ошибка: при интегрировании по частотам обязательно нужно учитывать, что $\omega = \tilde{\omega} + i\delta$, потому что полюса находятся на действительной оси. Возникают полувычеты $i\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (рис. 9.4), из которых следует затухание Ландау.

В следующей лекции будет рассмотрена теория ферми-жидкости.