ЛЕКЦИЯ 10

ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ

Рассмотрим теорию ферми-жидкости как теорию ферми-газа при низких температурах. Как известно,

$$\frac{N}{V} = \frac{p_{\mathrm{F}}^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{10.1}$$

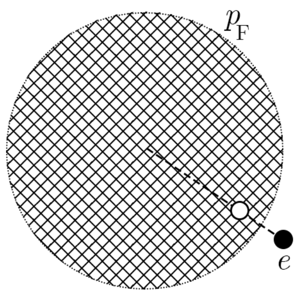

Рис. 10.1

В дальнейшем будем считать для простоты вычислений, что $\hbar = 1$. В ферми-жидкости при малой температуре могут возникать возбуждения близко от поверхности Ферми. Если вынуть электрон из состояния под поверхностью Ферми, освободившееся место называется **дыркой**. Относительно начала координат её энергия ξ меньше, чем $\frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}$, но относительно поверхности Ферми эта энергия положительна, так как чтобы перевести дырку из-под поверхности Ферми, нужна энергия.

$$\xi = \left|\frac{p^2}{2m} - \frac{p_{\mathrm{F}}^2}{2m}\right|. \tag{10.2}$$

Если $p > p_{\mathrm{F}}$, то эта энергия, разумеется, положительна, а если $p < p_{\mathrm{F}}$, то будем считать её положительной, имея в виду, что можно получить положительную величину, рассматривая не электроны, а квазичастицы. В линейном приближении $p^2 - p_{\mathrm{F}}^2 = 2p_{\mathrm{F}}(p - p_{\mathrm{F}})$. Тогда

$$\xi = v_{\mathrm{F}}|p - p_{\mathrm{F}}|, \tag{10.3}$$

где $v_{\mathrm{F}} = \dfrac{p_{\mathrm{F}}}{m}$. Это энергия элементарных возбуждений в ферми-жидкости вблизи поверхности Ферми, если взаимодействие слабое. При сильном взаимодействии формула (10.3) остаётся такой же, но скорость перенормирована: $v_{\mathrm{F}} = \dfrac{p_{\mathrm{F}}}{m^*}$, $m \neq m^*$.

Возбуждения описываются распределением Ферми:

$$n_0 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{T}\xi_p} + 1}. \tag{10.4}$$

Эффективный химический потенциал для этих возбуждений $\tilde{\mu} = 0$, потому что их число не фиксировано. Вышесказанное справедливо как для электронов, так и для дырок, единственное отличие заключается в электрическом заряде: у электронов он равен $-e$, а у дырок — $+e$.

Чтобы описать возбуждения, нужно, как и в случае горячей плазмы, написать уравнения движения, описывающие квазичастицы. Поскольку квазичастицы взаимодействуют слабо, то можно считать движение свободным в фазовом пространстве $(r,\ p)$. В этом пространстве уравнения движения просто являются уравнениями непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v\nabla)f + \dot{\vec{p}}\,\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(vf) + \frac{\partial}{\partial p}(\dot{\vec{p}}f) = 0. \tag{10.6}$$

Это эквивалентные записи, поскольку $\nabla v + \dfrac{\partial}{\partial p}\dot{p} = 0$ в силу уравнений механики. Так как возбуждений мало, $\dot{p}$ линейно по количеству возбуждений, то можно вместо f в последнем члене выражений (10.5) и (10.6) написать $f^{(0)}$. $f^{(0)}$ не зависит от времени и координат, потому что это однородный газ, описывающийся распределением (10.4) (в этих формулах $f^{(0)}$ и n_0 — это одно и то же).

Перепишем уравнение (10.5):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (v\nabla)f_1 + \dot{\vec{p}}\,\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = 0. \tag{10.7}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial}{\partial[}h]U. \tag{10.8}$$

Перейдём к импульсному представлению. Под знаком интеграла будет множитель

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = d\theta\frac{kdk}{(2\pi)^3} = d\theta g_{\mathrm{F}}, \tag{10.9}$$

где $g_{\mathrm{F}} = \dfrac{m^* p_{\mathrm{F}}}{\pi^2}$ — плотность состояний на поверхности Ферми. Поэтому

$$\left(\dot{\vec{p}}\right)_k = -i\vec{k}U_k g_{\mathrm{F}}. \tag{10.10}$$

До этого момента всё вышесказанное применимо как для электронного газа, так и для нейтрального газа ^{3}He. Найдём U_k в случае газа ^{3}He. Если взаимодействие происходит только на коротких расстояниях, то компоненты Фурье не зависят от $\vec{k}$ и приблизительно равны дельта-функциям: $U_k = U_0$. Таким образом,

$$\left(\dot{\vec{p}}\right)_k = -i\vec{k}U_0 g_{\mathrm{F}}. \tag{10.11}$$

Поскольку и гелий, и электрон имеют спин $\frac{1}{2}$, а магнитное поле не учитывается, то имеется вырождение по магнитному полю, добавляющее множитель 2 в выражение для g_{F}. [1]

В электронном газе U — это кулоновский потенциал. В электронейтральных системах, к которым относятся также и металлы, имеет место дебаевское экранирование, поэтому

$$U_k = \frac{4\pi e^2}{k^2 + \kappa^2}, \tag{10.12}$$

$$\left(\dot{\vec{p}}\right)_k = -i\vec{k}\frac{4\pi e^2}{k^2 + \kappa^2} g_{\mathrm{F}}. \tag{10.13}$$

Перепишем потенциал более аккуратно:

$$V = 2\int \frac{d^3r' d^3r'}{(2\pi)^3} U f_1. \tag{10.14}$$

$$f_1 = \left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon}\chi(\tilde{\theta})\right|, \tag{10.15}$$

поскольку неравновесное распределение отличается от равновесного только вблизи поверхности Ферми. χ — это скалярная функция, которая вводится вместо неравновесной функции f_1. Почему так можно сделать, будет рассматриваться в курсе кинетики, а здесь просто примем это как факт. $\tilde{\theta} = (\theta, \phi)$. С учётом (10.15) можно переписать (10.14) так:

$$V = 2\int \frac{d^3r' d^3r'}{(2\pi)^3} U \left|\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon}\chi(\tilde{\theta})\right|. \tag{10.16}$$

Поэтому все выражения, где в правой части есть множитель U_k, и все следствия таких выражений нужно домножить на $<\chi>$ — среднее по направлениям от функции χ.

Представим все функции в виде разложения по плоским волнам, например, $f_1 \sim \mathrm{e}^{-i\omega t + i\vec{k}[h]}$. Подставим это в (10.7), чтобы получить уравнение для компонент Фурье:

$$(-i\omega + i(\vec{v}\vec{k}))\chi + i(\vec{k}\vec{v})U_k g_{\mathrm{F}} <\chi> = 0. \tag{10.17}$$

В первом слагаемом в (10.17) стоит сама функция χ, а в последнем слагаемом — её среднее по всем направлениям. Отсюда получаем решение:

$$\chi = \frac{(\vec{k}\vec{v})}{\omega - (\vec{k}\vec{v})} U_k g_{\mathrm{F}} <\chi>. \tag{10.18}$$

Итак, зависимость χ от направления найдена, и она проста, поскольку $(\vec{k}\vec{v}) = k v_{\mathrm{F}} \cos\Theta$, Θ — угол между этими векторами.

[1] Это никак не повлияло на дальнейшие выкладки, потому что лектор где-то потерял этот множитель, а

Теперь найдём спектр возбуждений. Для этого нужно усреднить выражение (10.18) по углам.

$$\langle\chi\rangle = \left\langle\frac{kv\cos\Theta}{\omega - kv\cos\Theta}\right\rangle U_k g_{\mathrm{F}} \langle\chi\rangle, \tag{10.19}$$

$$1 = \left\langle\frac{kv}{\omega - kv}\right\rangle U_k g_{\mathrm{F}}. \tag{10.20}$$

Уравнение (10.20) одинаково и для электронов в металле, и для нейтрального газа, отличаются только U_k: в случае нейтрального газа $U_k = U_0$, а в случае электронного газа он определяется выражением (10.12).

Введём обозначение $S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\omega}{k}$. В случае звукового спектра S имеет смысл скорости возбуждения. В общем случае S зависит от k. Подставим это в (10.20):

$$1 = \left\langle\frac{\cos\Theta}{S - \cos\Theta}\right\rangle U_k g_{\mathrm{F}}. \tag{10.21}$$

Если речь идёт о нейтральном газе, то $U_k = \mathrm{const}$, следовательно, и $S = \mathrm{const}$, и спектр возбуждений действительно является звуковым, $\omega \sim k$. Но это не звук, потому что звук — это колебания в приближении гидродинамики, когда $\omega\tau \ll 1$, $\omega \ll \dfrac{1}{\tau}$, а в рассматриваемом случае столкновениями можно пренебречь.

Напомним, что в уравнении на функцию распределения типа (10.7) в правой части стоит интеграл столкновений. Если проинтегрировать это уравнение по плотности частиц, импульсу или энергии, можно получить интегралы движения. Получающиеся уравнения называются уравнением непрерывности, уравнением Эйлера и уравнением теплопроводности. В приближении локального равновесия во всех случаях справа стоит ноль из-за соответствующих законов сохранения.

Но рассматриваемая ситуация противоположна вышеописанной: $\omega\tau \gg 1$. Для ^{3}He это даёт скорость **нуль-звука** — понятие, которое ввёл Ландау.

Рассмотрим подробнее уравнение (10.21).

$$\begin{aligned} 1 = \left\langle\frac{\cos\Theta}{S - \cos\Theta}\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{-1} 1 d\cos\Theta \frac{\cos\Theta - S + S}{S - \cos\Theta} = \\ = -1 + S\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx \frac{1}{S - x} = -1 + \frac{1}{2} S \ln\frac{S+1}{S-1}, \end{aligned} \tag{10.22}$$

$$\frac{1}{U_k g_{\mathrm{F}}} - 1 + \frac{1}{2} S \ln\frac{S+1}{S-1}. \tag{10.23}$$

Для гелия, как уже было сказано, $U_k = U_0$. Величина $U_0 g_{\mathrm{F}} \ll 1$, потому что нейтральные атомы ^{3}He слабо взаимодействуют друг с другом. Поэтому в уравнении (10.21) множитель $\left\langle\dfrac{\cos\Theta}{S - \cos\Theta}\right\rangle$ должен быть много больше единицы. Для этого S должно быть близко к 1.

$$-1 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{S-1} = \frac{1}{U_0 g_{\mathrm{F}}}, \tag{10.24}$$

где именно, не знает.

$$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{S-1} = 1 + \frac{1}{U_0 g_\mathrm{F}}, \tag{10.25}$$

$$\frac{2}{S-1} = \mathrm{e}^{\frac{2}{U_0 g_\mathrm{F}}}, \tag{10.26}$$

$$S - 1 = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{U_0 g_\mathrm{F}}}. \tag{10.27}$$

В пределе, когда $U_0 g_\mathrm{F} = 0$, $S = 1$.

Теперь рассмотрим случай электронного газа, когда значение S большое. Разложим (10.23) в ряд Тейлора по степеням $\frac{1}{S}$. Получим

$$\frac{1}{S^2} + \frac{3}{5S^4} = \frac{1}{U_k g_\mathrm{F}}. \tag{10.28}$$

Сокращая промежуточные выкладки, можно написать ответ:

$$\omega^2 = \Omega^2. \tag{10.29}$$

Этот ответ совпадает с выражением для холодной плазмы, которое было получено на предыдущей лекции.

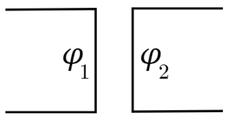

Рис. 10.2

На 8 лекции был получен результат, что при эффекте Джозефсона в кольцевом сверхпроводнике со щелью

$$j = j_\mathrm{c} \sin\phi_{12}, \tag{10.30}$$

где ϕ_{12} — разность фаз $\phi_1 - \phi_2$ между двумя сторонами сверхпроводника (рис. 10.2).

Получим то же самое не из феноменологических, а из микроскопических соображений. Прежде всего, нужно записать уравнения движения куперовских пар. Куперовские пары являются бозе-частицами, поэтому волновая функция сверхпроводящего состояния — это волновая функция бозе-газа. Уравнение Гинзбурга – Ландау в данном случае можно называть **уравнением Гросса – Питаевского** для неидеального бозе-газа. Будем считать, что внешнего магнитного поля нет.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - |a|\Psi + b|\Psi|^2\Psi + V(x), \tag{10.31}$$

$$V(x) = V_0\delta(x). \tag{10.32}$$

Константа a взята с модулем, потому что в сверхтекучем состоянии она отрицательна. Слагаемые с коэффициентами a и b получились из выражения для свободной энергии вариацией по Ψ^*:

$$F = a|\Psi|^2 + \frac{1}{2}b|\Psi|^4. \tag{10.33}$$

Будем считать $m = 1$, $|a| = 1$, $b = 1$, чтобы обезразмерить уравнение (10.31).

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi + |\Psi|^2\Psi + V(x). \tag{10.34}$$

Волновые функции справа и слева должны быть непрерывны, а производная на границе раздела сред терпит скачок. В дальнейшем опустим потенциал $V(x)$, поскольку можно получить искомое решение и без него. Уравнение (10.34) называется **уравнением Захарова**. Несмотря на то, что оно нелинейное, у него есть точное решение. Прежде всего, представим функцию Ψ в виде

$$\Psi = \mathrm{e}^{i\left(vx - \frac{1}{2}v^2 t\right)} Z(x). \tag{10.35}$$

Это бегущая волна со скоростью v и кинетической энергией v^2. Подставим (10.35) в (10.34):

$$-\frac{1}{2}(2ivZ' + Z'') - Z + |Z|^2 Z = 0. \tag{10.36}$$

Это одномерное нелинейное уравнение. Если для упрощения положить $Z = \mathrm{const}$, то из (10.36) можно получить решение для однородного сверхпроводника. Но оказывается, что у этого уравнения есть неоднородное решение, называемое **солитонным**, или **солитоном Захарова**. Чтобы его вывести, требуются громоздкие выкладки, поэтому запишем сразу ответ:

$$Z = \sin u \,\mathrm{th}(x \sin u) - i \cos u. \tag{10.37}$$

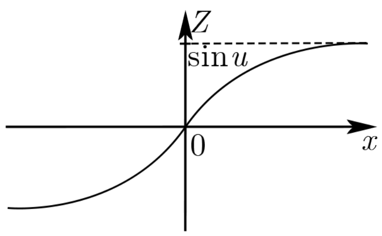

Рис. 10.3

В этом решении за зависимость от x отвечает гиперболический тангенс. Также есть комплексная добавка $-i\cos u$. У решения (10.37) есть такие свойства:

$$\lim_{\pm\infty} |Z(x)| = 1, \tag{10.38}$$

$$Z(0) = -i\cos u. \tag{10.39}$$

Действительная часть (10.37) изображена на рис. 10.3.

$$v = \Psi^* \hat{p} \Psi = \cos u. \tag{10.40}$$

Теперь нужно сшить решения на границе сред с разными параметрами u, $u_1 \neq u_2$. В результате должна получиться формула типа (10.30).

Примечательно, что центр солитона Захарова не зависит от координаты. Тем не менее, из-за того, что тангенс зависит от x, то скорость отлична от нуля, и есть поток, отличный от нуля. Здесь уместна аналогия с рекой, имеющей порог: в одних местах мелко, в других — глубоко, но поток воды есть всюду, он постоянен и непрерывен.