ЛЕКЦИЯ 2

ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА И ШАЛЯ. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

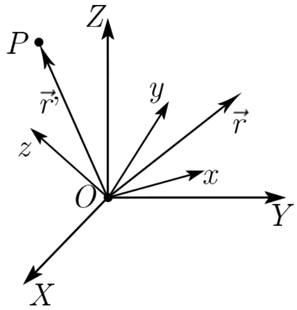

Рис. 2.1

Имеется неподвижная система координат $OXYZ$. Обозначим её как S Рассмотрим твёрдое тело, имеющее жёстко привязанные к нему оси Ox, Oy и Oz, вращающиеся вместе с телом (рис. 2.1). Обозначим систему координат $Oxyz$ как S’. Выберем в этом теле точку P.

В системе координат S’ $\overrightarrow{OP} = \vec{r'}$. Теперь будем вращать S’ вокруг неподвижной точки. Тогда вектор $\vec{r'}$ в системе S изменит своё направление. Обозначим конечный радиус-вектор точки P как $\vec{r}$. $\vec{r'}$ и $\vec{r}$ (в системе координат S) связаны соотношением $\vec{r} = A\vec{r'}$, где A — матрица перехода от S’ к S.

Напомним теорему Эйлера, сформулированную на прошлой лекции.

Теорема 3 (Теорема Эйлера о конечном перемещении твёрдого тела, имеющего непод
Произвольное перемещение твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно осуществить вращением вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку. *

Это означает, что если ось этого вращения проходит через $\vec{r}$, то $\vec{r}$ остаётся на месте, и $\vec{r} = A\vec{r}$.

Чтобы доказать теорему, нужно доказать, что у матрицы A есть собственное значение, равное $+1$. Тогда собственный вектор и будет задавать ось вращения.

Док-во: $f(\lambda) = \det \|A - \lambda E\|$. Начальное и конечное положения тела заданы, значит, матрица A тоже задана. Нужно доказать, что $f(1) = 0$.

$$f(1) = \det \|A - E\| = \det \|A^T - E^T\| = \det \|A^{-1} - E\|. \tag{2.1}$$

Умножим выражение (2.1) на $1 = \det A$. Получим, что

$$f(1) = \det A \det \|A^{-1} - E\| = \det \|E - A\| = (-1)^3 \det \|A - E\| = -f(1). \tag{2.2}$$

Таким образом, $f(1) = 0$. ■

Если известна матрица A, можно найти и угол поворота. Для этого нужно перейти от системы координат $OXYZ$ к системе $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$, где ось $O\tilde{Z}$ направлена по найденной оси вращения. Тогда матрица $\tilde{A}$ будет представлять собой матрицу поворота вокруг оси $O\tilde{Z}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Матрицы A и $\tilde{A}$ подобны, у них одинаковый характеристический многочлен. Значит, сумма диагональных элементов у них совпадает.

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2\cos\alpha. \tag{2.4}$$

Из этого равенства можно получить угол поворота:

$$\cos\alpha = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}. \tag{2.5}$$

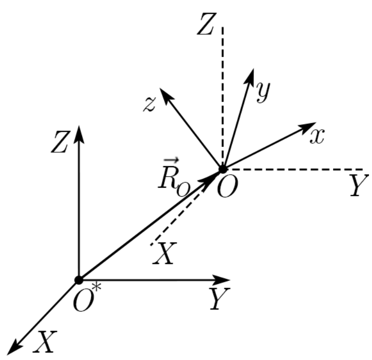

Рис. 2.2

Чтобы закончить рассмотрение конечных перемещений твёрдого тела, сформулируем **теорему Шаля**.

Теорема 4 (Теорема Шаля) Произвольное перемещение твёрдого тела можно разложить на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из начального положения в конечное, и вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. *

Выбирая разные полюса, можно сделать бесконечное множество таких разложений. Но угол поворота и направление оси будет во всех таких разложениях одними и теми же, потому что угол зависит только от матрицы A, и равенство (2.5) позволяет однозначно его определить.

Теперь перейдём к вычислению скоростей и ускорений твёрдого тела.

Определение 10: ***Поступательным движением*** *на интервале времени называется такое движение, при котором между двумя моментами времени из этого интервала тело совершает поступательное перемещение.* ♣

Заметим, что поступательное движение не обязательно должно быть прямолинейным. Примеры поступательного движения: лифт, движение кабинок на колесе обозрения, движение педали велосипеда.

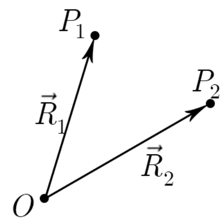

Рис. 2.3

Пусть точки P_1 и P_2 принадлежат твёрдому телу, движущемуся поступательно. Тогда на любом интервале времени (t_1, t_2) $\Delta\vec{R}_1 = \Delta\vec{R}_2$. Если перейти к пределу, когда $t_2 - t_2 \to 0$, то можно найти, что $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, а также $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. Иными словами, для каждого значения времени из интервала, когда тело движется поступательно, векторы скорости и ускорения всех точек этого тела одинаковы. Поэтому можно говорить, что твёрдое тело движется со скоростью $\vec{v}$ и испытывает ускорение $\vec{w}$.

В дальнейшем движение обычно будет рассматриваться не на конечном интервале времени, а в определённый момент времени — **мгновенное кинематическое состояние** тела.

Определение 11: *Если в данный момент времени все точки твёрдого тела имеют одинаковые векторы скоростей $\vec{v}$, то говорят, что тело находится в состоянии* ***мгновенно-поступательного движения*** *со скоростью $\vec{v}$.* ♣

Заметим, что об ускорениях при этом ничего не говорится, так что они могут быть и различными для разных точек тела.

Определение 12: *Если в данный момент времени все точки некоторой прямой в твёрдом теле имеют нулевые скорости, то говорят, что тело находится в состоянии* ***мгновенного вращения*** *вокруг этой прямой, а сама прямая называется* ***мгновенной осью вращения.*** ♣

Это относится только к данному моменту; в другие моменты времени мгновенное вращение может происходить вокруг другой прямой, или она может отсутствовать вовсе. Кроме того, мгновенная ось вращения может не содержать ни одной точки твёрдого тела — она может лежать за его пределами.

Определение 13: Мгновенно-винтовое движение *— это совокупность двух движений: мгновенного вращения вокруг некоторой оси и мгновенно-поступательного движения вдоль этой же оси.* ♣

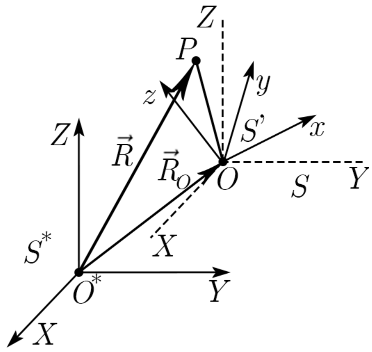

Рис. 2.4

Снова введём системы координат O^*XYZ (S^*), $OXYZ$ (S) и $Oxyz$ (S'). Последние две построены из произвольно выбранного полюса тела — точки O. Системы координат S^* и S имеют одинаковое направление осей, а оси S^* жестко связаны с телом и вращаются вместе с ним. Возьмём произвольную точку P в теле. В S' $\overrightarrow{OP} = \vec{r}' = \mathrm{const}$, в S $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$,

$$\vec{r} = A\vec{r}'. \tag{2.6}$$

Радиус-вектор точки P в системе S^* — $\vec{R}$,

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}. \tag{2.7}$$

Чтобы найти скорость точки P, нужно продифференцировать выражение (2.7).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}_O + \dot{\vec{r}}. \tag{2.8}$$

$\dot{\vec{R}}_O$ — это скорость выбранного полюса $\vec{v}_O$. При движении ориентация твёрдого тела меняется, поэтому матрица A зависит от времени. Согласно (2.6),

$$\dot{\vec{r}} = \dot{A}\vec{r}' = \dot{A}A^{-1}\vec{r}. \tag{2.9}$$

Матрица $AA^T = E$, поскольку $A^T = A^{-1}$. Продифференцируем обе части равенства $AA^T = E$ по времени.

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0, \tag{2.10}$$

$$\dot{A}A^{-1} = -A\dot{A}^T. \tag{2.11}$$

$$\left(\dot{A}A^{-1}\right)^T = -\dot{A}A^T = -\dot{A}A^{-1}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что матрица $B \overset{\text{def}}{=} \dot{A}A^{-1}$ кососимметрическая (то есть $B^T = -B$), значит, её диагональные элементы равны нулю, а противоположные относительно главной диагонали элементы равны по модулю и имеют разные знаки. Запишем её в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Вектор $\vec{r}$ в системе S имеет компоненты $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Тогда

$$\dot{A}A^{-1}\vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_Y Z - \omega_Z Y \\ \omega_Z X - \omega_X Z \\ \omega_X Y - \omega_Y X \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Введём величину $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix}$. Тогда $\dot{A}A^{-1}\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Можно написать формулу (2.9) в виде

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{2.15}$$

Итак,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.} \tag{2.16}$$

Выражение (2.16), также называемое **формулой Эйлера**, — это общая формула для скоростей точек твёрдого тела, совершающего произвольное движение. $\vec{\omega}$ называется **вектором мгновенной угловой скорости**. Оказывается, что *вектор $\vec{\omega}$ существует и единственен в каждый момент времени.*

Вектор скорости не зависит от системы координат. Вспомним естественный способ задания движения — там скорость получалась как $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{d\sigma}$, где σ — длина дуги. Казалось бы, этот вектор инвариантен относительно системы координат. С другой стороны, он связан с $\vec{\omega}$ соотношением (2.16). Иными словами, $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$. Значит, вектор угловой скорости инвариантен относительно системы координат. $\vec{\omega}$ не зависит и от выбора полюса, поскольку он определялся через матрицу поворота A, а она не зависит от выбора полюса.

Из формулы (2.16) можно вывести много следствий. Упомянем только самые важные из них.

Следствия: Как уже говорилось, в общем случае скорость точки твёрдого тела состоит из скорости произвольного полюса и $\vec{\omega} \times \vec{r}$. ■

Следствия: Возьмём в твёрдом теле две произвольные точки P_1 и P_2. Пусть их скорости равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Оказывается, что проекции этих скоростей на прямую, соединяющую эти точки, равны. ■

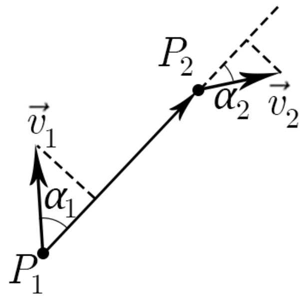

Рис. 2.5

То есть $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$. Это почти очевидно, но всё же докажем это утверждение, так как в дальнейшем оно будет использоваться.

Расстояние между точками P_1 и P_2 фиксировано, эти точки не могут сближаться или удаляться. Возьмём точку P_1 за полюс. Тогда

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{P_1P_2}. \tag{2.17}$$

Умножим обе части (2.17) скалярно на $\overrightarrow{P_1P_2}$. Тогда

$$\vec{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}, \tag{2.18}$$

$$v_2 \cos\alpha_2 |\overrightarrow{P_1P_2}| = v_1 \cos\alpha_1 |\overrightarrow{P_1P_2}|. \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что $v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2$.

Перейдём к вычислению ускорений точек твёрдого тела. Ускорение любой точки есть производная от скорости по времени. Согласно (2.16),

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{w}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{2.20}$$

Вектор $\vec{\epsilon} \overset{\text{def}}{=} \dot{\vec{\omega}}$ — это **вектор мгновенного углового ускорения**. Тогда можно переписать формулу (2.20) так:

$$\boxed{\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).} \tag{2.21}$$

Второе слагаемое в (2.21) называется **вращательным ускорением**: $\vec{w}_{\text{вр}} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$. Последнее слагаемое в (2.21) называется **осестремительным ускорением**: $\vec{w}_{\text{ос}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Таким образом, можно сформулировать **Теорему Ривальса**.

Теорема 5 (Теорема Ривальса) Ускорение произвольной точки твёрдого тела — это сумма ускорения полюса, вращательного ускорения и осестремительного ускорения: $\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{w}_{\text{вр}} + \vec{w}_{\text{ос}}$. *

Для того чтобы лучше понять эту формулу, рассмотрим некоторые важные частные случаи.

1). Пусть твёрдое тело движется поступательно. Тогда $A(t) = \text{const}$, а значит, $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{\epsilon} = \vec{0}$. Ни вращательного, ни осестремительного ускорения нет, поэтому $\vec{v} = \vec{v}_O$ и $\vec{w} = \vec{w}_O$.

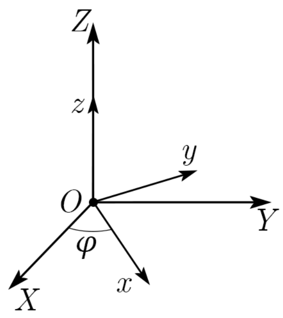

Рис. 2.6

2). Пусть твёрдое тело вращается вокруг *неподвижной* оси. Выберем систему координат, в которой ось вращения совпадает с осью OZ. Систему координат, связанную с телом, будем обозначать $Oxyz$. Оси OZ и Oz совпадают. Всё движение задаётся одной функцией $\phi = \phi(t)$, где ϕ — это угол между OX и Ox. Тогда матрица A — это матрица поворота вокруг оси OZ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Обозначим координаты векторов $\vec{r}'$ и $\vec{r}$: $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. В итоге получается $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$, то есть вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения. $\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}$ — тоже направлен по оси вращения.

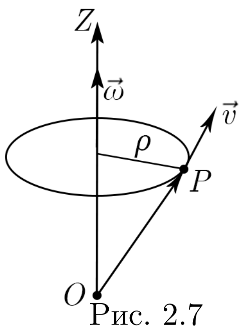

Рис. 2.7

Пусть $\vec{\omega}$ направлен по оси Z. Возьмём произвольную точку твёрдого тела P с радиус-вектором $\vec{r}$. Каждая точка тела, в том числе и P, движется по окружности, центр которой находится на оси Z (рис. 2.7). Радиус окружности для точки P обозначим как ρ. $\vec{v}_O = 0$, $\vec{w}_O = 0$. Скорость точки P $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ направлена по касательной к окружности; $v = |\dot{\phi}|\rho$.

Вращательное ускорение $\vec{w}_{\text{вр}} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$. Пусть для определённости $\vec{\epsilon}$ сонаправлен с $\vec{\omega}$. Вращательное ускорение направлено по касательной к окружности (рис. 2.8), $w_{\text{вр}} = |\ddot{\phi}\rho|$. Осестремительное ускорение $\vec{w}_{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ направлено к центру окружности, $w_{\text{ос}} = \dot{\phi}^2\rho$. Полное ускорение — $\vec{w}$, $w = \rho\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$. Угол между $\vec{w}$ и $\vec{w}_{\text{ос}}$ обозначим как β. Тогда

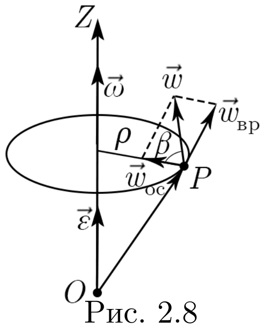

Рис. 2.8

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{|\epsilon|}{\omega^2} = \dfrac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}$. Осестремительное ускорение — это нормальное ускорение точки P, а вращательное ускорение является тангенциальным.

3). Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной точки O. Тогда $\vec{v}_0$, $\vec{w}_0$. Будем принимать точку O за полюс. Согласно (2.16), $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Это выражение совпадает со случаем неподвижной оси. Но между этими двумя случаями имеется принципиальное различие.

В случае одной неподвижной точки в каждый момент времени имеется прямая, проходящая через O, скорость которой равна нулю. Именно на этой прямой лежит $\vec{\omega}$. Имеет место мгновенное вращение вокруг этой оси. Но, в отличие от случая неподвижной оси, $\vec{\omega}$ может менять направление. Уже нельзя сказать, что $|\vec{\omega}| = |\dot{\phi}|$, как в предыдущем случае. В общем случае мгнове ые моменты времени разная.

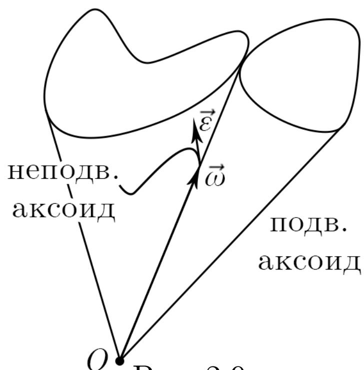

Рис. 2.9

Пусть, например, $\vec{\omega}$ перемещается в пространстве. Конец этого вектора описывает замкнутую кривую. Тогда мгновенная ось вращения описывает коническую поверхность с вершиной в точке O. Эта поверхность называется **неподвижным аксоидом**. В твёрдом теле $\vec{\omega}$ описывает другую поверхность, называемую **подвижным аксоидом**. Мгновенная ось вращения направлена по $\vec{\omega}$.

На неподвижном аксоиде конец вектора $\vec{\omega}$ описывает некоторую кривую. Эта кривая называется **годографом** этого вектора. Оказывается, что $\vec{\epsilon}$ направлен по касательной к этому годографу.

Введём единичный вектор $\vec{e}$, направленный по $\vec{\omega}$. Тогда $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$. В свою очередь

$$\vec{\epsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{e} + \omega\dot{\vec{e}}. \tag{2.23}$$

Первое слагаемое в (2.23) параллельно $\vec{\omega}$. Обозначим его $\vec{\epsilon}_1$. Второе ортогонально этому вектору, поскольку $\vec{e}$ имеет один и тот же модуль, и $\dot{\vec{e}}$ ортогонален $\vec{e}$. Обозначим его $\vec{\epsilon}_2$. Тогда $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2$ (рис. 2.10), и вращательное ускорение равно сумме двух составляющих: $\vec{w}_{\text{вр}} = \vec{\epsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\epsilon}_2 \times \vec{r}$.

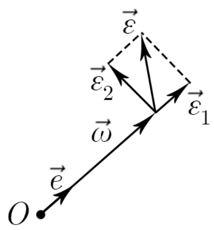

Рис. 2.10

Пусть $\vec{\omega}$ вращается в пространстве. Обозначим как $\vec{\Omega}$ его угловую скорость. В этом случае $\vec{\epsilon}_2 = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$.

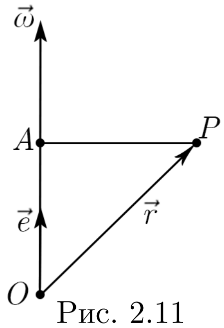

Рис. 2.11

Теперь остановимся поподробнее на осестремительном ускорении. Точка P имеет радиус-вектор $\vec{r}$.

$$\vec{w}_{\text{ос}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}). \tag{2.24}$$

Применим часто встречающуюся формулу из векторного исчисления:

$$\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \tag{2.25}$$

Тогда

$$\vec{w}_{\text{ос}} = \omega^2 \left(\vec{e}(\vec{e}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{e}, \vec{e})\right). \tag{2.26}$$

$(\vec{e}, \vec{e}) = 1$, а $(\vec{e}, \vec{r})$ — это длина отрезка OA (рис. 2.11).

$$\vec{w}_{\text{ос}} = \omega^2 \left(\overrightarrow{OA} - \vec{r}\right) = \omega^2 \overrightarrow{PA}. \tag{2.27}$$

4). Пусть тело движется в плоскости.

Определение 14: Плоское движение твёрдого тела *— это такое движение, при котором скорости всех точек этого тела параллельны некоторой плоскости.* ♣

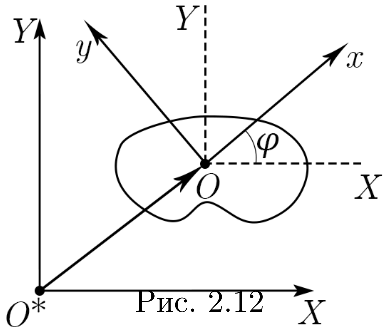

Рис. 2.12

Например, движение книги по поверхности стола является плоским движением. Для изучения такого движения достаточно взять одно сечение, параллельное плоскости движения. Введём в этой плоскости систему координат O^*XY. Выберем в теле полюс O и проведём через него оси параллельные X и Y. Введём также систему координат Oxy, жёстко связанную с телом и вращающуюся вместе с ним. Обозначим угол между осями OX и Ox как ϕ.

Если известны координаты полюса X_O, Y_O и угол ϕ как функции времени, то тем самым задано плоское движение твёрдого тела. Конечно, все формулы для скоростей и ускорений, работающие в общем случае, годятся и здесь. Но имеются и некоторые особенности, которые следует рассмотреть.

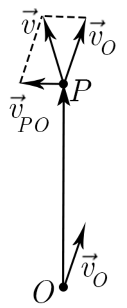

Рис. 2.13

Скорость $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}$, где $\vec{v}_{PO}$ — скорость точки P относительно точки O. $\vec{v}_{PO} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$. Вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости движения, как и вектор $\vec{\epsilon}$. Пусть для определённости $\vec{\omega}$ направлен к читателю (рис. 2.13). Суммарный вектор скорости определяется по правилу параллелограмма.

Оказывается, что если при плоском движении $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, то существует одна точка, скорость которой равна нулю. При этом скорости остальных точек таковы, будто тело вращается вокруг прямой, проходящей через неё и перпендикулярной плоскости движения. Эта точка называется **мгновенным центром скоростей**.

Найдём эту точку. Скорость произвольной точки C твёрдого тела $\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OC}$. Найдём такую точку C, чтобы $\vec{v}_C = \vec{0}$:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OC} = 0. \tag{2.28}$$

Векторно умножим выражение (2.28) на $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OC}\right) = 0. \tag{2.29}$$

Снова применим формулу (3.5). Получим

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega}\left(\vec{\omega}, \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OC}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = 0. \tag{2.30}$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{OC}$ ортогональны, поэтому $\left(\vec{\omega}, \overrightarrow{OC}\right) = 0$. Поэтому

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2}. \tag{2.31}$$

Получается, что $\overrightarrow{OC}$ ортогонален $\vec{v}_O$, а его модуль равен $\dfrac{v_O}{\omega}$.

Итак, доказано, что мгновенный центр скоростей существует. Его можно получить геометрически. Для этого нужно повернуть в плоскости движения вектор $\vec{v}_O$ на $\dfrac{\pi}{4}$ в сторону вращения, и в этом направлении отложить отрезок длиной $\dfrac{v_O}{\omega}$. Полученная точка и будет мгновенным центром скоростей.

На практике обычно по-другому. Известны скорости двух точек P_1 и P_2, они равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно. По ним нужно построить мгновенный центр скоростей. Для того чтобы решить эту задачу, нужно рассмотреть несколько случаев.

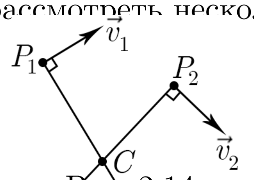

Рис. 2.14

1). Пусть $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$ (рис. 2.14). В этом случае нужно провести прямую через точку P_1, перпендикулярную $\vec{v}_1$ и прямую через P_2, перпендикулярную $\vec{v}_2$. Эти прямые не пересекутся, поскольку $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$. Точка пересечения этих прямых C и является мгновенным центром скоростей. Это так, потому что проекция скорости $\vec{v}_1$ на прямую P_1C равна нулю, как и проекция скорости $\vec{v}_2$ на прямую P_2C.

2). $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Возьмём P_1 за полюс. Тогда $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$. Так как скорости точек равны, то $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = 0$, значит, $\vec{\omega} = 0$. В этом случае мгновенного центра скоростей не существует, а движение является мгновенно-поступательным.

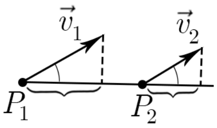

Рис. 2.15

3). $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$, и эти скорости не перпендикулярны прямой AB (рис. 2.15). Этот случай невозможен, потому что проекции скоростей всех точек твёрдого тела на прямую AB должны быть одинаковыми.

4). $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$, эти скорости перпендикулярны прямой AB. В этом случае проведём прямую через концы векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Возможны два варианта, изображённые на рисунках **??** и 2.16. В обоих вариантах мгновенным центром скоростей является точка C пересечения построенной прямой с линией, соединяющей точки P_1 и P_2.

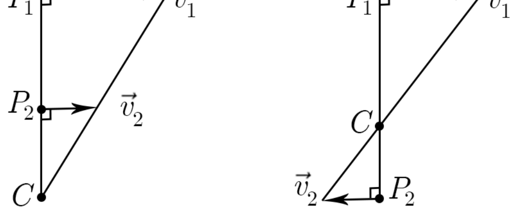

Рис. 2.16

Следующую лекцию начнём с рассмотрения ускорений точек при плоском движении твёрдого тела.