ЛЕКЦИЯ 3

УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

1. Ускорения точек при плоском движении

На прошлой лекции были освещены почти все вопросы кинематики твёрдого тела. Были изучены скорости точек тела при плоском движении, было введено понятие мгновенного центра скоростей и разъяснены способы его геометрического нахождения. Если в каждый момент времени принять мгновенный центр скоростей за полюс, то скорости таковы, будто в каждый момент времени тело вращается вокруг оси, проходящей через этот полюс и перпендикулярной плоскости движения. Мгновенный центр скоростей существует тогда, когда движение отлично от мгновенно-поступательного. Он перемещается и на плоскости, и в самом сечении твёрдого тела.

Определение 15: *Кривая, по которой движется мгновенный центр скоростей на плоскости, называется* ***неподвижной центроидой****.* ♣

Определение 16: *Кривая, по которой движется мгновенный центр скоростей в сечении твёрдого тела, называется* ***неподвижной центроидой****.* ♣

Поясним эти понятия на примере. Пусть по горизонтальной прямой без скольжения катится диск (рис. 3.1). Значит, скорость точки диска, в которой он касается прямой,

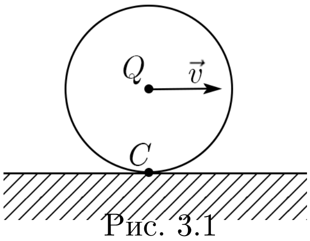

Рис. 3.1

равна нулю. Если диск движется, то эта точка и является мгновенным центром скоростей. Можно сказать, что это сразу три точки: одна принадлежит диску, другая принадлежит плоскости, а третья — воображаемая. Неподвижной центроидой в данном случае является прямая, по которой катится диск. Подвижной центроидой является граница диска.

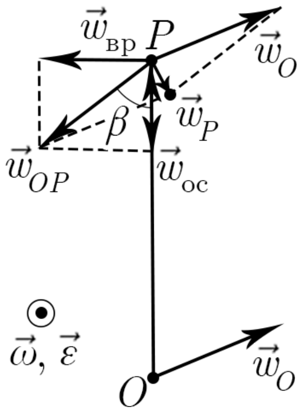

Рис. 3.2

Теперь перейдём к ускорениям точек при плоском движении твёрдого тела. Выберем в качестве полюса точку O. Требуется вычислить ускорение произвольной точки P, принадлежащей плоскости движения. Она равна $\vec{w} = \vec{w}_O + \vec{w}_{PO}$. По формуле Ривальса, выведенной на прошлой лекции,

$$\vec{w}_{OP} = \vec{w}_{\text{вр}} + \vec{w}_{\text{ос}} = \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OP} - \omega^2 \overrightarrow{OP}. \tag{3.1}$$

Пусть для определённости $\vec{\omega}$ и $\vec{\epsilon}$ направлены на читателя (рис. 3.2). Тогда вектор $\vec{w}_{\text{вр}}$ повёрнут на $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки относительно $\overrightarrow{OP}$, а вектор $\vec{w}_{\text{ос}}$ направлен от точки P к точке O. Их сумма $\vec{w}_{PO}$ определяется по правилу параллелограмма. $\vec{w}_{\text{вр}}$ и $\vec{w}_{\text{ос}}$ ортогональны, поэтому $w_{PO} = OP\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$. Обозначим угол между $\vec{w}_{\text{ос}}$ и $\vec{w}_{PO}$ как β. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{|\epsilon|}{\omega^2}$ одинаковый для любой точки P. Чтобы получить полное ускорение, нужно сложить $\vec{w}_{PO}$ и $\vec{w}_O$ по правилу параллелограмма (рис. 3.2).

Оказывается, что если в данный момент времени $\vec{\omega}$ или $\vec{\epsilon}$ не равен нулю, что эквивалентно $\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \neq 0$, то существует единственная точка плоскости, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений**. Докажем это утверждение.

Док-во: Точка O — полюс плоской фигуры, её ускорение $\vec{w}_O$. Заданы $\vec{\epsilon}$ и $\vec{\omega}$. Вычислим ускорение произвольной точки Q.

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ} + \omega^2 \overrightarrow{OQ}. \tag{3.2}$$

Попробуем найти точку Q, у которой правая часть равенства (3.2) равна нулю:

$$\vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ} + \omega^2 \overrightarrow{OQ} = 0. \tag{3.3}$$

Векторно умножим (3.3) на $\vec{\epsilon}$:

$$\vec{\epsilon} \times \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \left(\vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ}\right) - \omega^2 \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ} = 0. \tag{3.4}$$

Ко второму слагаемому в (3.4) применим формулу

$$\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.5}$$

Вектор $\vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ}$ можно выразить из (3.3):

$$\vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OQ} = \omega^2 \overrightarrow{OQ} - \vec{w}_O. \tag{3.6}$$

Получим

$$\vec{w}_O + \vec{\epsilon}\left(\vec{\epsilon}, \overrightarrow{OQ}\right) - \overrightarrow{OQ}\left(\vec{\epsilon}, \vec{\epsilon}\right) - \omega^4 \overrightarrow{OQ} + \omega^2 \vec{w}_O = 0. \tag{3.7}$$

$\vec{\epsilon}$ и $\overrightarrow{OQ}$ ортогональны, поэтому второе слагаемое в (3.7) равно нулю. В итоге

$$\vec{OQ} = \frac{\omega^2 \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{w}_O}{\epsilon^2 + \omega^4}. \tag{3.8}$$

■

Найдём вектор $\overrightarrow{OQ}$ геометрически. Правило построения вытекает из выражения (3.8).

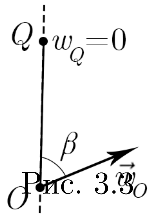

Рис. 3.3

Пусть известен вектор $\vec{w}_O$. Повернём его на угол β в сторону вращения, если вращение ускоренное, и в обратную сторону, если оно замедленное. Получаем прямую некоторую прямую, показанную на рис. 3.3 пунктиром. На ней откладываем отрезок $OQ = \dfrac{w_O}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}$.

Ускорение точки Q равно нулю — это и есть мгновенный центр ускорений. Примем его за полюс. Тогда ускорение произвольной точки P будет направлено под углом β к радиус-вектору PQ (рис. 3.4). Его модуль $w_P = OP\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$.

Мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений — это две разные точки. Снова рассмотрим диск, катящийся по горизонтальной прямой линии (рис. 3.1). Пусть он движется равномерно, то есть его центр движется с постоянной скоростью. Как уже было сказано, мгновенный центр скоростей в данном случае — точка касания C. Мгновенный центр ускорений — это центр диска, поскольку его ускорение равно нулю, а $\vec{\omega} \neq \vec{0}$.

Итак, рассмотрены все важные случаи в кинематике твёрдого тела.

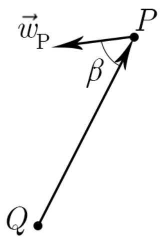

Рис. 3.4

2. Кинематические инварианты. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось

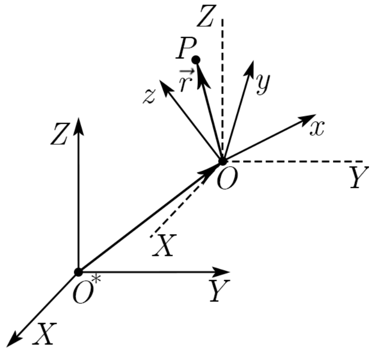

Рис. 3.5

Рассмотрим неподвижную систему координат O^*XYZ. Выберем в твёрдом теле полюс O, введём систему координат, жёстко связанную с телом — $Oxyz$. Скорость произвольной точки твёрдого тела P

$$\vec{v}_P = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{3.9}$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ в системе координат $OXYZ$.

Как известно, вектор $\vec{\omega}$ единственен в каждый момент времени и инвариантен относительно выбора системы координат. Величина $I_1 = \omega^2$ называется **первым кинематическим инвариантом**.

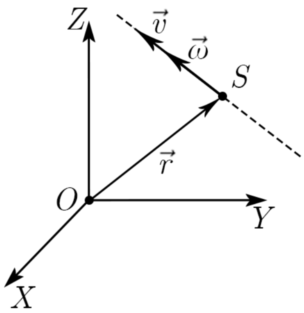

Рис. 3.6

Возьмём две произвольные точки A и B. Умножим скалярно их скорость на $\vec{\omega}$, и получится, согласно (3.9), что $(\vec{v}_A, \vec{\omega}) = (\vec{v}_B, \vec{\omega}) = (\vec{v}_O, \vec{\omega})$, то есть такое скалярное произведение не зависит от выбора точки. $I_2 = (\vec{v}, \vec{\omega})$ называется **вторым кинематическим инвариантом**.

Для I_2 имеется хорошая геометрическая интерпретация. В данный момент у твёрдого тела есть какое-то поле скоростей и угловая скорость $\vec{\omega}$. Возьмём произвольную точку твёрдого тела. Оказывается, что проекция скорости этой точки на направление $\vec{\omega}$ такая же, как и для всех остальных точек.

Утверждение 1 Если $I_2 \neq 0$, то тело находится в состоянии мгновенно-винтового движения. *

Док-во: Чтобы доказать данное утверждение, нужно найти ось, скорости которой коллинеарны вектору $\vec{\omega}$. Выберем произвольный полюс O. Его проекции в выбранной системе координат $\vec{v}_O = \begin{pmatrix} v_{OX} \\ v_{OY} \\ v_{OZ} \end{pmatrix}$. Вектор $\vec{\omega}$ также известен: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix}$. Скорость произвольной точки S с координатами $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ может быть вычислена так:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OS}. \tag{3.10}$$

Если S находится на искомой оси, то

$$\vec{v}_S = p\vec{\omega}, \tag{3.11}$$

где p — число. Умножим обе части (3.11) скалярно на $\vec{\omega}$:

$$(\vec{v}_O, \vec{\omega}) = p(\vec{\omega}, \vec{\omega}), \tag{3.12}$$

$$I_2 = p\omega^2 = pI_1. \tag{3.13}$$

Отсюда $p = \dfrac{I_2}{I_1} \neq 0$. Число p может быть как положительным, так и отрицательным. Это зависит от того, направлены $\vec{v}$ на оси винта и $\vec{\omega}$ в одну сторону или в противоположные стороны. Если $p > 0$, то это **правый винт** ($\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ сонаправлены), этот случай изображён на рис. 3.6. Если $p < 0$, то это **левый винт** ($\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ противоположно направлены).

Выражения (3.11) и (3.10) определяют уравнение искомой прямой:

$$\boxed{\frac{v_{OX} + \omega_Y Z - \omega_Z Y}{\omega_X} = \frac{v_{OY} + \omega_Z X - \omega_X Z}{\omega_Y} = \frac{v_{OZ} + \omega_X Y - \omega_Y X}{\omega_Z} = p.} \tag{3.14}$$

■

Прямая, найденная в доказательстве утверждения, называется **мгновенной винтовой осью**. Скорости её точек коллинеарны вектору $\vec{\omega}$.

3. Связь между абсолютной и относительной производной вектора

Рассмотрим важный вопрос, охватывающий области за пределами теоретической механики: как связаны производные вектора в подвижной и неподвижной системах координат? Они могут вести себя по-разному. Пусть, например, неподвижная система координат O^*XYZ связана с аудиторией. Рассмотрим твёрдое тело, которое может двигаться в этом пространстве, а именно, стул. Представим, что со стулом связан некий вектор и подвижная система координат $oxyz$. При любом движении в системе координат $oxyz$ вектор является постоянным. В подвижной же системе координат проекции этого вектора на оси очевидным образом меняются.

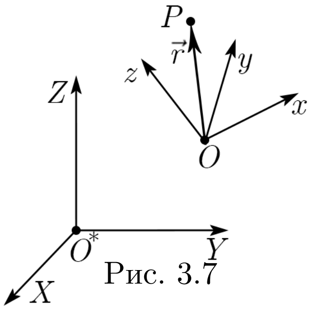

Рис. 3.7

Пусть точка P не является точкой твёрдого тела и может двигаться произвольно. В подвижной системе отсчёта S' вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{r}\,'$, а в неподвижной системе отсчёта S^* вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Связь между этими векторами известна:

$$\vec{r} = A\vec{r}\,', \tag{3.15}$$

причём матрица A тоже зависит от времени.

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ — это **абсолютная производная** вектора $\overrightarrow{OP}$. $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ — это скорость изменения $\vec{r}\,'$ относительно подвижной системы отсчёта. $A\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ называется **относительной производной** вектора $\overrightarrow{OP}$. Она будет обозначаться $\dfrac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}$. Найдём связь между $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и $\dfrac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}$. Продифференцируем формулу (3.15):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{A}\vec{r}\,' + A\dot{\vec{r}}\,' = \dot{A}\vec{r}\,' + \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}, \tag{3.16}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{A}A^{-1}A\dot{\vec{r}}\,' + \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}. \tag{3.17}$$

Матрица $\dot{A}A^{-1}$ — это $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Таким образом,

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}.} \tag{3.18}$$

Если бы вращения не было, производные были бы одинаковыми. Также они одинаковы, если вектор $\vec{\omega}$ коллинеарен $\vec{r}$.

4. Сложное движение точки

Введём в пространстве неподвижную систему координат O^*XYZ. Относительно неё движется система координат $O_1x_1y_1z_1$. Материальная точка P движется относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, это **относительное движение** точки P. Движение системы координат $O_1x_1y_1z_1$ относительно неподвижной системы координат O^*XYZ

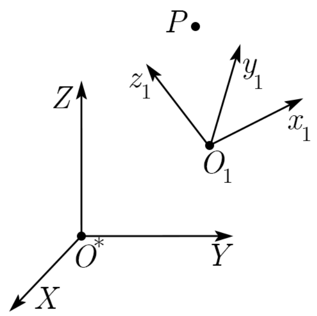

Рис. 3.8

называется **переносным движением**. Движение точки P относительно неподвижной системы O^*XYZ называется **абсолютным движением**. Какова связь между кинематическими величинами при относительном, переносном и абсолютном движениях?

Кроме системы $O_1x_1y_1z_1$ можно задать и систему $O_2x_2y_2z_2$, движущуюся относительно $O_1x_1y_1z_1$, и так далее до бесконечности. Но для простоты будем рассматривать случай только двух систем; если их больше, то можно считать переносным движением абсолютное движение предыдушей из вложенных систем координат.

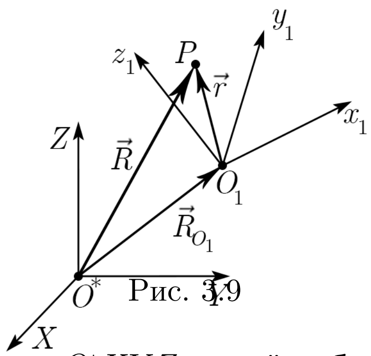

Рис. 3.9

Скорость точки P относительно O^*XYZ назовём **абсолютной скоростью** $\vec{v}_{\text{a}}$. Её же скорость относительно $O_1x_1y_1z_1$ будем называть **относительной скоростью** $\vec{v}_{\text{r}}$. $\vec{v}_{\text{e}}$ — это **переносная скорость**, а именно абсолютная скорость той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент времени оказалась точка P. Аналогично можно ввести понятия **абсолютного ускорения**, **относительного ускорения** и **переносного ускорения**.

Теорема 6 (Теорема о сложении скоростей) Абсолютная скорость точки равна сумме переносной и относительной скоростей: $\vec{v}_{\text{a}} = \vec{v}_{\text{e}} + \vec{v}_{\text{r}}$. *

Док-во: Введём радиус-векторы $\vec{R}_{O_1}$, $\vec{R}$, $\vec{r}$ (рис. 3.9). Они удовлетворяют равенству $\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r}$. Продифференцируем это равенство по времени, получим

$$\vec{v}_{\text{a}} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r} + A\dot{\vec{r}'}. \tag{3.19}$$

Последнее слагаемое в (3.19) — это относительная скорость. Сумма $\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ — это скорость той точки подвижной системы координат, которую задаёт радиус-вектор $\vec{r}$, то есть переносная скорость. Таким образом, $\vec{v}_{\text{a}} = \vec{v}_{\text{e}} + \vec{v}_{\text{r}}$. ■

Теорему о сложении скоростей иногда называют теоремой о параллелограмме скоростей, потому что абсолютная скорость строится по правилу параллелограмма от относительной и переносной скоростей.

Теорема 7 (Теорема о сложении ускорений) $\vec{w}_{\text{a}} = \vec{w}_{\text{e}} + \vec{w}_{\text{r}} + \vec{w}_{\text{C}}$, где $\vec{w}_{\text{C}}$ — **кориолисово ускорение**, равное $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{r}}$. *

Док-во:

$$\vec{w}_{\text{a}} = \dot{\vec{v}}_{\text{a}} = \dot{\vec{v}}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + A\dot{\vec{r}}' + A\ddot{\vec{r}}', \tag{3.20}$$

$$\vec{w}_{\text{a}} = \vec{w}_{O_1} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times A\dot{\vec{r}}' + \dot{A}A^{-1}A\dot{\vec{r}}' + \vec{w}_{\text{r}} = \vec{w}_{O_1} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{w}_{\text{r}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{r}}. \tag{3.21}$$

Первые три слагаемых в (3.21) — это ускорение той точки подвижной системы координат, где в данный момент находится точка P, то есть это переносное ускорение. Последнее слагаемое в (3.21) — это знакомое из курса общей физики кориолисово ускорение. Тогда из (3.21) следует, что

$$\vec{w}_{\text{a}} = \vec{w}_{\text{e}} + \vec{w}_{\text{r}} + \vec{w}_{\text{C}}. \tag{3.22}$$

■

Теорему о сложении ускорений иногда называют теорему о параллелепипеде ускорений, созвучно с правилом сложения трёх векторов в пространстве.

Кориолисово ускорение может отсутствовать, например, когда $\vec{\omega} = \vec{0}$, когда $\vec{v}_{\text{r}} = \vec{0}$, или когда эти векторы коллинеарны. Это ускорение состоит из двух равных частей: из влияния вращения подвижной системы на относительную скорость и влияние относительного движения на переносную скорость.

5. Кинематика сложного движения твёрдого тела

Вводится неподвижная система отсчёта O^*XYZ и подвижная система координат $O_1x_1y_1z_1$. В подвижной системе координат движется твёрдое тело. Выберем в теле произвольную точку P и найдём её абсолютные скорость и ускорение (рис. 3.8).

В данном случае имеется сложное движение: подвижная система координат движется относительно неподвижной, а твёрдое тело движется относительно подвижной системы отсчёта.

1). Пусть тело движется относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ со скоростью мгновенно-поступательного движения $\vec{v}_1$. Далее, пусть $\vec{v}_2$ — скорость мгновенно-поступательного движения системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно O^*XYZ. Тогда по теореме о сложении скоростей абсолютная скорость любой точки тела одинакова, и $\vec{v}_{\text{a}} = \vec{v}_{\text{e}} + \vec{v}_{\text{r}}$. Таким образом,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.} \tag{3.23}$$

Если было бы больше вложенных систем координат, движущихся друг относительно друга, то скорость всех точек твёрдого тела в данном случае была бы равна сумме соответствующих скоростей вложенных систем.

2). Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей.

Пусть в данный момент твёрдое тело вращается относительно подвижной системы координат с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$. Также в данный момент подвижная система координат вращается в неподвижной с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Оси, вокруг которых происходят эти вращения, пересекаются.

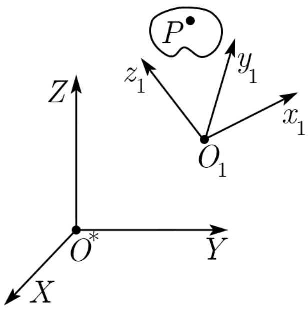

Рис. 3.10

Построим параллелограмм на векторах $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ и возьмём произвольную точку B на диагонали построенного параллелограмма. Посчитаем скорость точки B.

$$\vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AB} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}) \times \overrightarrow{AB} = 0. \tag{3.24}$$

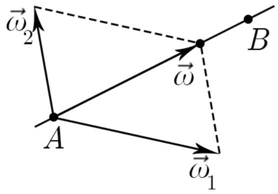

Рис. 3.11

Итак, все точки прямой AB неподвижны, поэтому AB —мгновенная ось вращения. Скорость произвольной точки P равна $(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}) \times \overrightarrow{AP}$, значит результирующая угловая скорость

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}}. \tag{3.25}$$

Если бы пересекающихся осей мгновенного вращения было больше двух, то результирующее движение тоже было бы мгновенным вращением с угловой скоростью $\sum\limits_i \vec{\omega}_i$. Заметим, что если в сложном движении складываются два вращения вокруг одной и той же прямой, а векторы $\vec{\omega}$ равны по величине и противоположно направлены, то $\vec{\Omega} = 0$, и из суммы эти вращения можно просто выбросить. И, соответственно, добавление пары таких вращений не меняет поле скоростей. Из этого очевидного факта следует важное утверждение, что $\vec{\omega}$ — **скользящий вектор**. Поясним, что это означает.

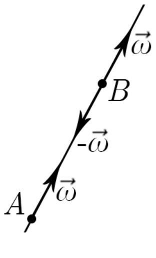

Рис. 3.12

Пусть твёрдое тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Этот вектор можно приложить к любой точке мгновенной оси вращения, и от этого поле скоростей не меняется. Иными словами, вектор $\vec{\omega}$ может скользить вдоль мгновенной оси вращения. Чтобы приложить этот вектор (изначально приложенный к A) к другой точке оси — B, достаточно рассмотреть сложное движение, в котором кроме вращения с $\vec{\omega}$, приложенным к A есть пара вращений вокруг той же оси: с $\vec{\omega}$, приложенным к B и с $-\vec{\omega}$, приложенным к B. Результирующий вектор мгновенного вращения при сложном движении $\vec{\Omega} = \vec{\omega} + (\vec{\omega} - \vec{\omega}) = \vec{\omega}$, но приложен уже к точке B, что и требовалось показать.

6. Кинематические уравнения Эйлера

Рассмотрим одну практическую иллюстрацию вышесказанного. Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной точки O. Зададим неподвижную систему координат $OXYZ$. Введём систему координат $Oxyz$, оси которой жёстко связаны с телом и вращаются вместе с ним. Орты этой системы координат обозначим как $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Обозначим на рисунке 3.13 углы Эйлера ϕ, Ψ и θ, которые вводились на 1 лекции.

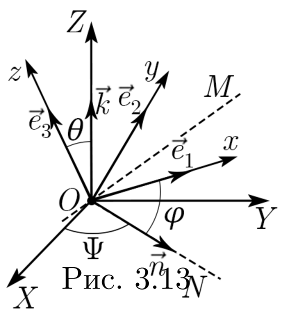

Рис. 3.13

Теперь проведём плоскость через оси OZ и Oz. Она по какой-то прямой пересечёт плоскость Oxy. На рисунке 3.13 она обозначена как OM. Плоскость OZz ортогональная линии узлов ON. Угол между Oy и OM тоже равен ϕ.

Введём вектор $\vec{k}$ — орт оси OZ. В системе координат $Oxyz$ он имеет компоненты $\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Введём также единичный вектор $\vec{n}$, направленный по линии узлов. В той же системе координат он имеет компоненты $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть вектор $\vec{\omega}$ имеет в ней компоненты $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$.

Как известно, переход от неподвижной системы координат к подвижной осуществляется тремя поворотами на углы Ψ, θ и ϕ вокруг соответствующих осей. Вращение происходит вокруг трёх пересекающихся осей. Поэтому результирующий вектор $\vec{\omega}$ равен сумме трёх составляющих.

1. Поворот вокруг OZ на угол Ψ. В $\vec{\omega}$ добавляется слагаемое $\dot{\Psi}\vec{k}$.

2. Поворот вокруг ON на угол θ. В $\vec{\omega}$ добавляется слагаемое $\dot{\theta}\vec{n}$.

3. Поворот вокруг Oz на угол ϕ. В $\vec{\omega}$ добавляется слагаемое $\dot{\phi}\vec{e}_3$.

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\phi}\vec{e}_3. \tag{3.26}$$

Проекции вектора $\vec{\omega}$ на оси, связанные с телом, вычисляются так:

$$p = (\vec{\omega}, \vec{e}_1), \quad q = (\vec{\omega}, \vec{e}_2), \quad r = (\vec{\omega}, \vec{e}_3). \tag{3.27}$$

$$p = \dot{\Psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \tag{3.28}$$

$$q = \dot{\Psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \tag{3.29}$$

$$q = \dot{\Psi}\cos\theta + \dot{\phi}. \tag{3.30}$$

Равенства (3.28), (3.29) и (3.30) — это **кинематические уравнения Эйлера**. Они выражают связь между проекциями вектора $\vec{\omega}$ на оси, связанные с телом, через углы Эйлера и их производные.